Hasard et QCM

d'après Math'x, TS, Didier, 2006

OBJECTIF : Comprendre qu'un schéma de Bernoulli n'appelle pas toujours une loi binomiale.

Un questionnaire à choix multiples est composé de dix questions numérotées de 1 à 10. Pour chacune d'elles, il est proposé quatre réponses possibles dont une seule est correcte. Un candidat répond entièrement au hasard à ce QCM en cochant pour chaque question l'une des quatre réponses données.

1) Justifier que répondre au hasard à une question de ce QCM est une épreuve de Bernoulli ; en préciser le succès et la probabilité que celui-ci se produise.

Donner trois exemples de résultats possibles (éléments de l'univers Ω de l'expérience consistant à répondre au hasard aux dix questions du QCM) et calculer les probabilités associées.

Combien cette expérience admet-elle de résultats ?

Peut-on la modéliser par une loi équirépartie ?

2) On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro de la première question où le candidat a répondu de façon exacte (on convient que X prend la valeur 11 si toutes les réponses sont fausses).

a) Préciser quelles valeurs peut prendre X ($X(\Omega)$ est l'ensemble de ces valeurs).

b) Calculer $P(X = k)$ pour chaque valeur k de $X(\Omega)$.

Quelle expression générale de $P(X = \mathrm{k})$ peut-on proposer ?

c) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

3) On décide d'attribuer au candidat un point par réponse exacte.
Soit Y la variable aléatoire associant aux réponses la note sur dix qui en résulte.

a) Justifier que Y suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.

b) Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne la note maximale ?

c) Quelle est la probabilité que le candidat obtienne la moyenne (au moins) ?

d) Quelle note le candidat a-t-il le plus de chances d'obtenir ?

e) Quelle note le candidat peut-il espérer obtenir (c'est-à-dire, quelle serait sa note moyenne s'il remplissait au hasard un grand nombre de QCM) ?

4) On suppose que n candidats sont invités à répondre à ce QCM et que tous le font uniquement guidés par le hasard.

a) Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un élève obtienne la note 10 ?

b) En utilisant la calculatrice, combien doit-il y avoir de candidats pour que cela se produise avec une probabilité supérieure à 0,99 ?

5) Pour pénaliser davantage les candidats qui répondent au hasard, on décide de modifier le système de notation : on accorde toujours un point par réponse juste mais on soustrait un demi-point dans le cas contraire.

Prouver que la variable aléatoire Z qui indique la note (éventuellement négative) obtenue par un candidat ayant répondu au hasard s'exprime par $Z = 1{,}5Y - 5$.

En déduire la probabilité qu'avec ces nouvelles règles, un candidat obtienne au moins la moyenne en répondant entièrement au hasard.