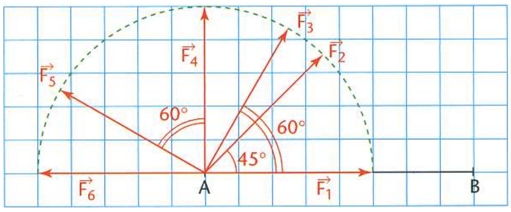
# PRODUIT SCALAIRE

- **Travail d'une force en physique**

Une force $\vec{F}$ s'exerce sur un wagon qui se déplace d'un mouvement rectiligne. Le point d'application de $\vec{F}$ se déplace de A à B.

**a)** Pour chacune des forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, …, $\vec{F_6}$ représentées ci-dessous, dire si elle favorise, s'oppose ou bien si elle n'a pas d'effet sur le mouvement du wagon.

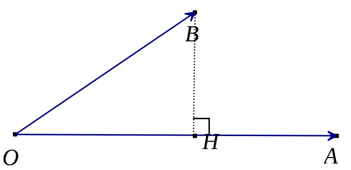



**b)** En Physique, on définit le travail W d'une force constante $\vec{F}$ pour un déplacement rectiligne de A à B comme le produit $F \times AB \times \cos(\overrightarrow{AB}, \vec{F})$ (F en N, AB en m et W en J).
Sur le graphique, un carreau représente une distance de 1 m et une force de 1 N.
Calculer le travail de chacune des six forces représentées. Que remarque-t-on ?

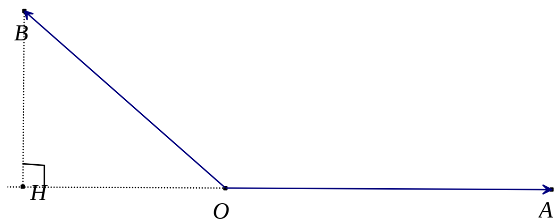
## I. Produit scalaire dans le plan

*1) Définition*

> Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires (donc non nuls) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. On appelle *H* le projeté orthogonal de *B* sur (*OA*).
>
> Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$




$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$




$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$

Remarques

- Lorsque l'un des vecteurs est nul, par exemple $\vec{v}$, on a $OB = 0$ et le produit scalaire est nul.
- Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel, qui peut être positif, négatif ou nul.

**Carré scalaire d'un vecteur**

> C'est par définition le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même. Il se note $\vec{u}^2$

D'après la définition, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$, où $\|\vec{u}\|$ désigne la norme, ou la longueur du vecteur $\vec{u}$.

En particulier, $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2$.

*2) Vecteurs orthogonaux*

> Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie :
> soit que l'un des deux est le vecteur nul
> soit que $(OA)$ est perpendiculaire à $(OB)$ avec $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ .

**Lien avec le produit scalaire**

> Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

*Démonstration*


Supposons d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux. Si l'un au moins d'entre eux est nul, leur produit scalaire est nul.

Sinon, en posant $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$, on sait que $(OA)$ est perpendiculaire à $(OB)$. Le projeté orthogonal $H$ de $B$ sur $(OA)$ est donc le point $O$ lui-même. On a donc :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=OA\times OH=0$$

Réciproquement supposons que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ .

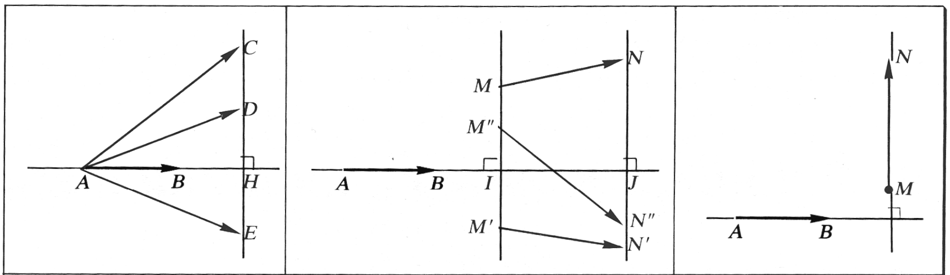
Si l'un des vecteur est le vecteur nul, ils sont bien orthogonaux. Si les deux sont non nuls, on pose $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ . Alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=OA\times OH\ =0$$

Mais $OA\neq 0$ impose que $OH=0$, donc que $H=O$.

Comme $(HB)$ est perpendiculaire par construction à $(OA)$, on a bien $(OA)\perp(OB)$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

*3) Configurations fondamentales*




| | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$<br>$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$<br>$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{M'N'}$<br>$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{M''N''}$<br>$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}$ | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=0.$ |

## II. Autres expressions et propriétés du produit scalaire

*1) Produit scalaire et cosinus*

> Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ , $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

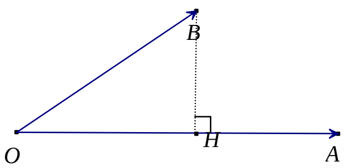
*Démonstration*

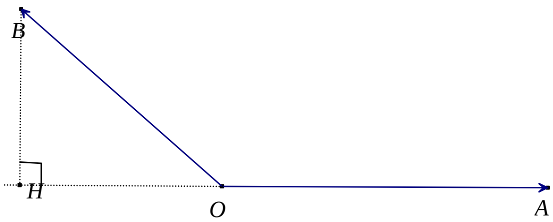
La relation est évidente lorsque les vecteurs sont colinéaires, soit qu'ils aient même sens avec $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$, soit qu'ils aient des sens contraires avec $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on pose comme d'habitude $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ . L'angle $\widehat{AOB}$ est noté $\theta$. Examinons les deux cas.

Lorsque $\theta$ est aigu, on a :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OH=OA\times OB\cos\theta$$






Lorsque θ est obtus, on a :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\times OH$$
$$= -OA\times OB\cos(\pi-\theta)$$
$$= OA\times OB\cos\theta$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\cos\theta = \cos\widehat{AOB} = \cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \cos(\vec{u},\vec{v})$.

*2) Quelques propriétés du produit scalaire*

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

Cela résulte immédiatement du fait que $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\vec{v},\vec{u})$.

- **Résultats algébriques**

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et *a* un nombre réel.
Alors :

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$$
$$\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$$

On peut en déduire particulièrement des règles de calculs « usuelles », en particulier les produits scalaires remarquables suivants :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$
$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$
$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$$

*2) Expression du produit scalaire en repère orthonormal*

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy' = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$.

*Démonstration*

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right) = xx\vec{i}^{\,2}+xy'\vec{i}\cdot\vec{j}+yx'\vec{j}\cdot\vec{i}+yy'\vec{j}^{\,2} = xx'+yy'$.

*Autre démonstration*

Dans le cas où on ne dispose pas de propriétés usuelles du produit scalaire…

On admet qu'étant donnée la définition le produit scalaire de deux vecteurs ne dépend pas du repère orthonormé que l'on chosit.

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, la formule est vérifiée.

Supposons donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Posons $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

On utilise le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires et de même sens et $(\vec{i},\vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

Le point *A* a pour coordonnée $x = OA = \|\vec{u}\|$ et $y=0$.

Le point *B* a pour coordonnées $x' = OB\cos(\vec{i},\vec{v}) = \|\vec{v}\|\cos(\vec{i},\vec{v})$ et $y' = \|\vec{v}\|\sin(\vec{i},\vec{v})$.

D'autre part, $(\vec{i},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$.

D'autre part, $xx'+yy' = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\cos(\vec{u},\vec{v})\| + 0\times\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$, ce qui prouve bien l'égalité.