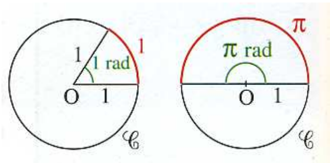
Angles Orientés, Trigonométrie, Coordonnées polaires

I. Le radian

Une unité de longueur est choisie dans le plan.

Définition

> $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 1.
> Le radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur $\mathscr{C}$ un arc de longueur 1.

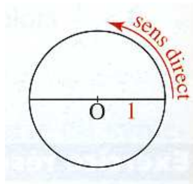


Un angle de π rad intercepte sur le cercle $\mathscr{C}$ un arc de longueur π. Cet angle a aussi pour mesure 180°.

La mesure en radian d'un angle est proportionnelle à sa mesure en degré.

II. Cosinus et sinus d'un angle

1) Cercle trigonométrique

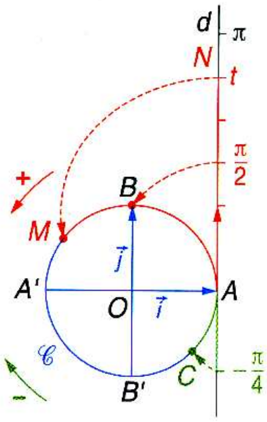


> Le cercle trigonométrique de centre O est celui qui a pour rayon 1 et qui est muni du sens direct : le sens inverse des aiguilles d'une montre.

L'autre sens est qualifié d'indirect.

Dans toute la suite, $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ désigne un repère orthonormal et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O, muni d'une origine A.

2) Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

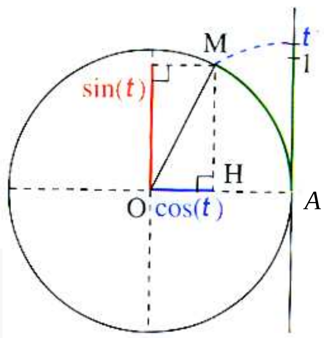


On considére la droite d tangente à $\mathscr{C}$ en A : en la munissant du repère $\left(A;\vec{j}\right)$, cette droite graduée représente l'ensemble ℝ des nombres réels. On enroule la droite d autour du cercle $\mathscr{C}$.

Par ce procédé de l'enroulement de la droite des réels, on peut associer à chaque nombre réel t un point M et un seul du cercle. Réciproquement, à chaque point du cercle on associe un infinité de nombres réels. Si t est l'un de ces nombres, les autres sont de la forme $t + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Le couple $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$ est appelé *angle orienté de vecteurs*.

La *mesure principale* (en radian…) de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$ correspond au chemin le plus court pour aller de A à M. Elle se trouve dans l'intervalle]-π;π].
Un angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$ possède *une infinité* de mesures de la forme $t + 2k\pi$ où k est un entier relatif.
On écrit : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=t+2k\pi$ ou encore : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=t \quad (2\pi)$.

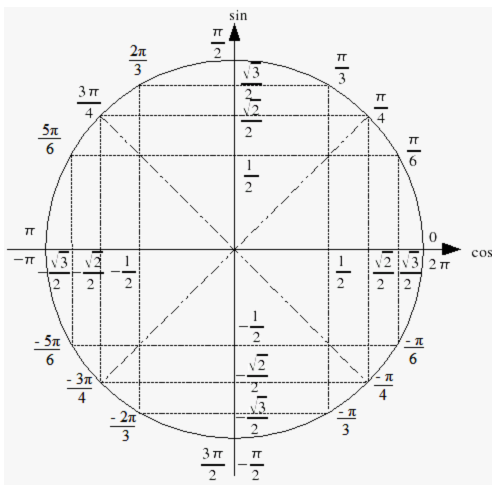
2) Cosinus et sinus d'un nombre réel



Soit t un nombre réel. Par enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, à tout réel t on associe un point M et un seul du cercle trigonométrique.

> Par définition, l'abscisse de M est le cosinus de t, noté cos t et l'ordonnée de M est le sinus de t, noté sin t.

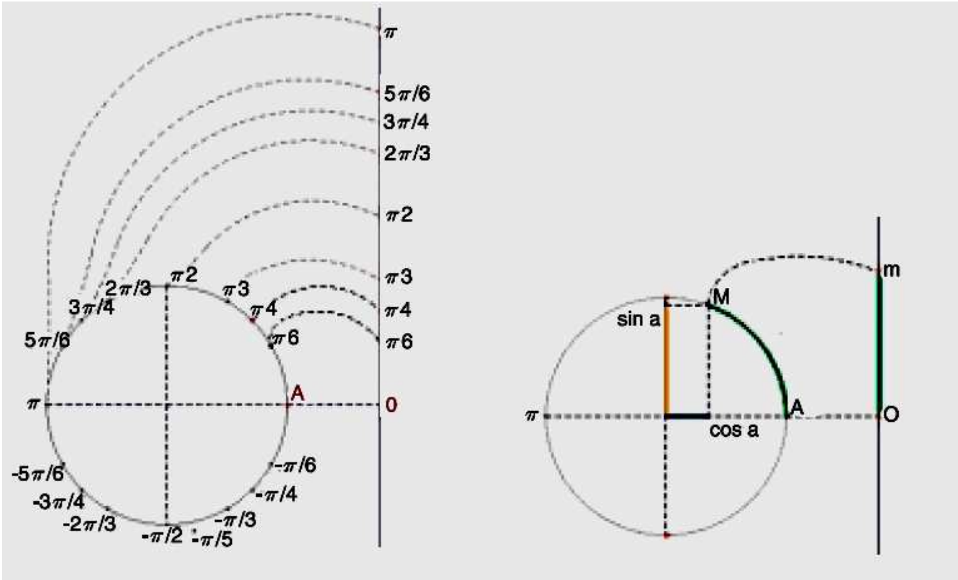
On peut écrire $\overrightarrow{OM} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$.



Valeurs remarquables

Angle α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	1
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

tableau des valeurs et démonstration



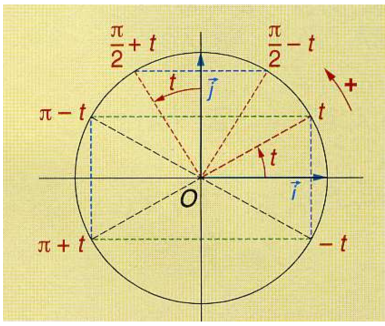
Quelques propriétés immédiates

Pour tout réel t :

$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$;

$\cos(t + 2k\pi) = \cos t$ et $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$;

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.



Angles associés

Pour tout réel t, on a :

$\cos(-t) = \cos t$ et $\sin(-t) = -\sin t$;

$\cos(\pi - t) = -\cos t$ et $\sin(\pi - t) = \sin t$;

$\cos(\pi + t) = -\cos t$ et $\sin(\pi + t) = -\sin t$;

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$;

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$.

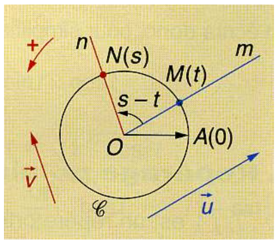
III. Angle orienté de deux vecteurs non nuls

1) Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

> On appelle angle orienté des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le couple $(\vec{u}\,,\ \vec{v})$.

2) Mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\ \vec{v})$



Considérons un point O du plan et construisons les points m et n tels que $\overrightarrow{Om} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{On} = \vec{v}$.
Les demi-droites $[Om)$ et $[On)$ coupent le cercle trigonométrique de centre O en deux points M et N, associés respectivement aux réels t et s (… définis à 2π près !)

> Une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\ \vec{v})$ ou $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$ est alors $s - t$.

Si α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\ \vec{v})$, alors les autres mesures sont $\alpha + 2k\pi$.
On écrit $(\vec{u}\,,\ \vec{v}) = \alpha + 2k\pi$ ou $(\vec{u}\,,\ \vec{v}) = \alpha\ \ (2\pi)$ ou même parfois $(\vec{u}\,,\ \vec{v}) = \alpha$…

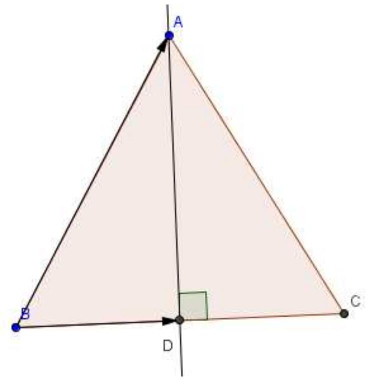
Ainsi $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$ signifie qu'*une* mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\dfrac{\pi}{3}$ … les autres mesures sont alors de la forme $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples : que vaut $(\vec{u}\,,\ \vec{u})$? $(\vec{u}\,, -\vec{u})$?

Remarque

La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

Exemple



ABC est un triangle équilatéral.
Calculer la mesure principale des angles suivants :

$$\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right),\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right),\ \left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}\right).$$

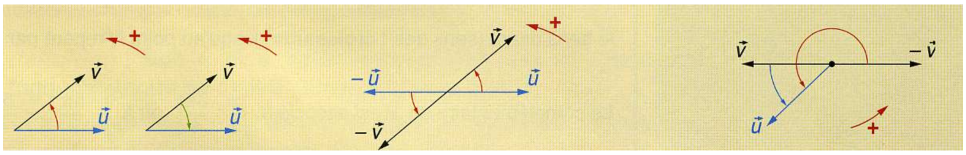
Construire un angle de vecteur dont la mesure principale soit 0, π, π/2 et –π/2.

2) Configurations et angles orientés de vecteurs

Relation de Chasles

Pour trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a ($\vec{u}$, $\vec{w}$) = ($\vec{u}$, $\vec{v}$) + ($\vec{v}$, $\vec{w}$).

Angles associés à l'angle orienté $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$:



$\left(\vec{v},\vec{u}\right)=-\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ $\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ $\left(\vec{v},\vec{u}\right)+\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\pi$;

Soient k et k' deux réels non nuls.
Alors si k et k' ont le même signe, alors $\left(k\vec{u},k'\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$; sinon $\left(k\vec{u},k'\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi$.

IV. Calculs trigonométriques

1) Formules d'addition

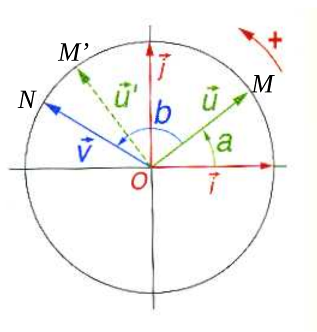
Pour tous réels a et b, on a :

$\cos\left(a+b\right)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\cos\left(a-b\right)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$\sin\left(a+b\right)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$ $\sin\left(a-b\right)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

Démonstration

Dans le cercle trigonométrique ci-dessous, on a placé le point M tel que $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)=a$ et le point N tel que $\left(\vec{u},\overrightarrow{ON}\right)=b$ en posant $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. On pose de même $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$.



Il est alors immédiat, d'après la relation de Chasles, de remarquer que $\left(\vec{i},\overrightarrow{ON}\right)=a+b$ donc que le point N a pour coordonnées (cos (a + b), sin (a + b)). Exprimons d'une autre façon les coordonnées de N.

On sait que le point M a pour coordonnées (cos a, sin a) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Autrement dit, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM}=\vec{u}=\cos a\vec{i}+\sin a\vec{j}\ .$$

Définissons le vecteur $\vec{u}'$ tel que $\left(\vec{u},\vec{u}'\right)=\frac{\pi}{2}$ et le point M' tel que $\overrightarrow{OM}'=\vec{u}'$.

Comme $\left(\vec{i},\vec{u}'\right)=\left(\vec{i},\vec{u}\right)+\left(\vec{u},\vec{u}'\right)=a+\frac{\pi}{2}$, le point M' a pour coordonnées, dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$,

$\left(\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(-\sin a,\cos a\right)$ et l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM}'=\vec{u}'=\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}=-\sin a\vec{i}+\cos a\vec{j}$$

Dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{u}'\right)$, le point N a pour coordonnées (cos b, sin b).

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \cos b\vec{u} + \sin b\vec{v} = \cos b\left(\cos a\vec{i} + \sin a\vec{j}\right) + \sin b\left(-\sin a\vec{i} + \cos a\vec{j}\right)\\ &= \left(\cos b\cos a - \sin b\sin a\right)\vec{i} + \left(\sin a\cos b + \sin b\cos a\right)\vec{j}\end{aligned}$$

Les formules d'addition en résultent immédiatement.

2) Formules de duplication

Pour tout réel a,

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$;

$\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

Exemple : Exprimer $\cos 3x$ et $\sin 4x$ en function de $\cos x$et $\sin x$.

V) Equations trigonométriques

Propriété

Soit a un nombre réel. Pour tout réel x :

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

VI) Repérage polaire

Définition

Soit M un point du plan distinct de O.

Un couple de coordonnées polaires de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un couple (r,θ), où r est la distance OM et θ est une mesure de l'angle orienté $(O,\overrightarrow{OM})$.

Vocabulaire

O est le pôle et la demi-droite $[OI)$ l'axe polaire.

On dit que r est le rayon polaire du point M et θ l'un de ses angles polaires.

Exemples

$I(1;0)$ dans le repère $(O, \vec{i})$

$J\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ dans le repère $(O, \vec{i})$

Propriété

Si M a pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors on a l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j}$

Exemple

Le couple $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ représente les coordonnées polaires d'un point M dans $(O, \vec{i})$.

Quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?

$\overrightarrow{OM} = 2\cos\frac{\pi}{3}\,\vec{i} + 2\sin\frac{\pi}{3}\,\vec{j} = 2\frac{1}{2}\,\vec{i} + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{j} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ et M a pour coordonnées cartésiennes $(1;\sqrt{3})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Théorème

Soit M un point du plan distinct de O.

• $(r;\theta)$ est un couple de coordonnées polaires du point M dans le repère $(O, \vec{i})$:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

• $(x;y)$ sont les coordonnées cartésiennes de M dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.