# TRINÔME DU SECOND DEGRE

## I. Le trinôme du second degré ?

*1) Définition*

> Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que $a \neq 0$.
> On appelle *fonction trinôme du second degré*, ou plus simplement *trinôme du second degré*, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Remarque
Un trinôme du second degré est un polynôme de la forme $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\ a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec trois termes.

- **Exemples**

$-x^2 + 3x + 5$ est un trinôme du second degré. $a =$ ; $b =$ ; $c =$
$3x^2 + 2x$ est un binôme du second degré. $a =$ ; $b =$ ; $c =$
$-x^2 + 3$ est un . $a =$ ; $b =$ ; $c =$
$2x - 1$ est un .

Le but du chapitre est d'étudier ces fonctions, mais aussi d'être capable de résoudre tout type d'équations ou d'inéquations du second degré.

*2) Ce que l'on sait déjà faire...*

- **Équations incomplètes**

C'est le cas où l'un des coefficients, sauf $a$, est égal à 0.
Par exemple, résolvons les équations et inéquations suivantes.

$-x^2 + 3x = 0$ ;
$3x^2 - 2 = 0$ ;
$4x^2 + 3 = 0$ ;

- **Utilisation d'identités remarquables**

Résolvons par exemple l'inéquation $4x^2 - 6x \leqslant -9$

- **Une factorisation toute bête**

Résolvons l'inéquation $(x + 1)^2 + (5 - 2x)(x + 1) \geqslant 0$

- **Et même le bon sens algébrique**

Résolvons les inéquations suivantes :

$x^2 + 1 \geqslant 0$
$-x^2 \geqslant 2$

L'intérêt du chapitre est notamment de proposer une méthode de résolution générale des équations et inéquations du second degré, que l'on pourra mettre en œuvre à chaque fois que les méthodes simples précédentes ne seront pas applicables. Cette méthode est basée sur l'écriture de la forme canonique du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

## II. Forme canonique d'un trinôme

*1) Sur quelques exemples*

Écrivons la forme canonique des trinômes suivants :

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$
$g(x) = 2x^2 + 12x + 18$
$h(x) = 3x^2 + 3x + 3$
$k(x) = 2x^2 + 6x + 1$

*2) Cas général*

> Pour tout $x$ réel :
>
> $$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$ (forme canonique du trinôme)
>
> en posant $\Delta = b^2 - 4ac$.
> $\Delta$ est appelé le *discriminant* du trinôme.

Remarque
Dans la forme canonique du trinôme la variable $x$ ne figure plus qu'une seule fois.

- **Exemples :**

$2x^2 - x + 3$ a pour discriminant $\Delta =$ et pour forme canonique
$-x^2 + 5x + 6$ a pour discriminant $\Delta =$ et pour forme canonique
$x^2 - 2x + 1$ a pour discriminant $\Delta =$ et pour forme canonique ......................

L'intérêt de la forme canonique est multiple :
- permettre la factorisation du trinôme ;
- la résolution de l'équation du second degré ;
- celle de l'inéquation du second degré ;
- la représentation graphique d'une fonction trinôme par des translations de paraboles de référence.

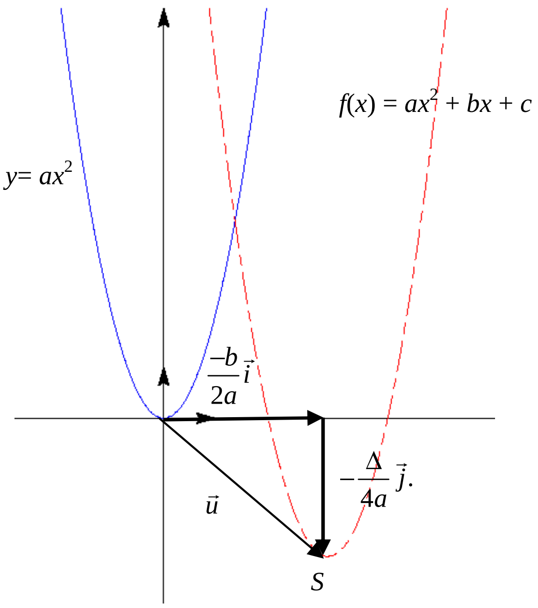
*3) Une première application à l'étude de la fonction trinôme*

Transformons la forme canonique du trinôme :

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

La courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ se déduit en appliquant à la courbe d'équation $y = ax^2$ une translation de vecteur $\vec{u}=\frac{-b}{2a}\vec{i}-\frac{\Delta}{4a}\vec{j}$.

Remarquons que si $a$ est positif, la parabole est orientée vers le haut, tandis que si $a$ est négatif, elle est orientée vers le bas. Le point $S$, sommet de la parabole, a pour coordonnées $\left(\alpha=\frac{-b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}=f(\alpha)\right)$.




Le tableau de variation s'en déduit immédiatement.

## III. Résolution de l'équation du second degré et factorisation du trinôme

*1) Équation du second degré à une inconnue*

> Une *équation du second degré à une inconnue x* est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (où $a$, $b$ et $c$ sont des réels et $a \neq 0$ )

Soit $f$ le trinôme du second degré défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ revient à déterminer les réels $x$ tels que $f(x) = 0$.
Les solutions de cette équation sont aussi appelées les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$. Graphiquement, les racines du trinôme, si elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $f$ avec l'axe des $x$.
Pour résoudre algébriquement cette équation, on doit chercher à factoriser $f(x)$.

*2) Résolution de l'équation*

La factorisation s'obtient à partir de la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ :

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

On doit chercher à factoriser cette expression, en faisant apparaître si possible une différence de deux carrés.
Trois cas sont à envisager :

- **$\Delta > 0$**

On peut écrire :

$$\begin{aligned}a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)&=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\&=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\end{aligned}$$

en posant $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut alors à l'équation $a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=0$ soit à $x=x_1$ ou $x=x_2$ (deux solutions). Remarquons que le trinôme se factorise en $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

- **$\Delta = 0$**

On peut écrire : $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

On a immédiatement une forme factorisée.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ soit à $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$ (une solution).
Remarquons que le trinôme se factorise en $f(x)=a\left(x-x_0\right)^2$.

- **$\Delta < 0$**

L'équation équivaut à $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} = 0$, soit à $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$, ce qui est impossible car un carré ne peut pas être égal à un nombre strictement négatif (pas de solution).
Par ailleurs $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ est une somme de deux nombres positifs, et ne peut donc plus être factorisé comme différence de deux carrés.

**Théorème**

> Soit $f(x)$ le trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On se propose de résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.
> On forme le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
> **Si Δ est strictement positif,** l'équation possède deux solutions (ou le trinôme possède deux racines) $x_1$ et $x_2$ données par :
> $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
> et le trinôme se factorise en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
> **Si Δ est nul,** l'équation possède une seule solution (ou le trinôme ne possède une racine dite *double*) $x_0$ donnée par :
> $$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
> et le trinôme se factorise en $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$.
> **Si Δ est strictement négatif,** l'équation n'a pas de solution (le trinôme n'a pas de racine) et le trinôme ne peut pas être factorisé en produit de facteurs du premier degré.

*3) Quelques exemples*

Résoudre les équations suivantes $2x^2 + 5x - 1 = 0$ ; $3x^2 - 2x - 4 =$ ; $2x^2 + 10\sqrt{2}x + 25 = 0$ .

## IV. <u>Signe du trinôme</u>

*1) Étude du signe*

Étudions le signe du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$. C'est la forme factorisée qui nous sera utile pour ce paragraphe. Nous distinguerons trois cas, selon le signe de Δ.

- **Si Δ > 0**

Soit $x_1$ et $x_2$ les racines du trinôme, en supposant pour fixer les idées que $x_1 = x_2$. On sait que $f(x)$ se factorise en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
On peut alors faire un tableau de signe...

***a* > 0**

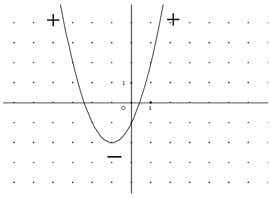
| valeurs de $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $x - x_1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| signe de $x - x_2$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| signe de $a$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| signe de $f(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

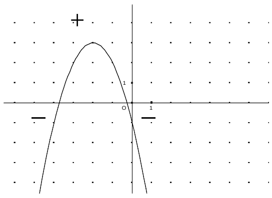
***a* < 0**

| valeurs de $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $x - x_1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| signe de $x - x_2$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| signe de $a$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| signe de $f(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

On résume en disant que le trinôme est du signe de *a* à l'extérieur des racines, du signe de $-a$ entre les racines.

Ce résultat se retrouve graphiquement. Comme $\Delta > 0$, la parabole coupe l'axe des $x$ en deux points. Elle peut être orientée vers le haut ($a$>0) ou vers le bas ($a$<0).




$a > 0$ $a < 0$

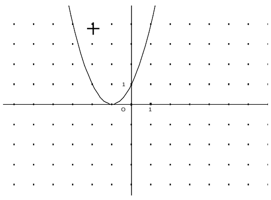
- **Si Δ = 0**

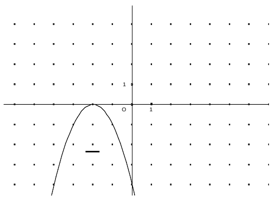
Soit $x_0$ la racine double du trinôme.
On sait que le trinôme se factorise en

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

Un carré étant toujours positif, il est alors clair que le trinôme est du signe de $a$.

L'interprétation graphique confirme ce résultat :

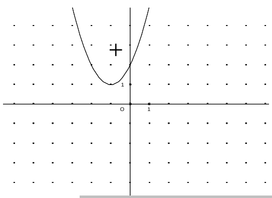


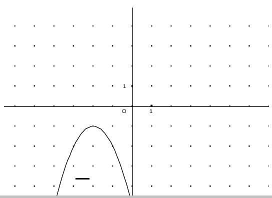




- **Si Δ < 0**

On sait que $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ :or, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}$ est un réel strictement positif.

On résume en disant le trinôme est du signe de $a$.




Pour résumer : $a\,x^2 + b\,x + c$ est du signe de $a$ sauf entre les racines...

*2) Quelques exemples*

Résoudre dans ℝ les inéquations
$2x^2 + 5x - 3 < 0$ ; $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 \leqslant 0$ ; $-5x^2 + x - 3 < 0$ ; $-x^2 + 2x - 4 \geqslant 0$.