LES FONCTIONS

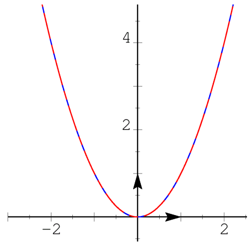
I. <u>Généralités sur les fonctions</u>

1) Qu'est-ce qu'une fonction ?

• On définit une fonction f sur I, une partie de $\mathbb{R}$, lorsque, à tout réel x de I, on associe un seul réel y noté $f(x)$. On dit alors que y est l'image de x par f ou que x est un antécédent de y par f.

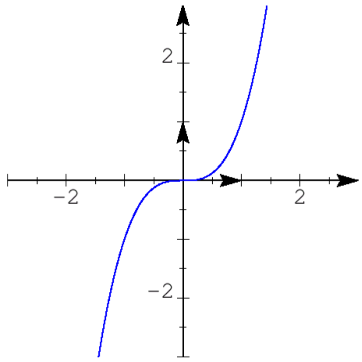
Une fonction peut être définie :

- par une formule explicite (la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2$) ;
- par une touche de calculatrice ou un algorithme
- graphiquement



• La représentation graphique C_f de f dans un repère du plan est l'ensemble des points $M(x\,;\,f(x))$ tels que $x \in I$.

• La relation $y = f(x)$ représente l'équation réduite de la courbe C_f. On parlera par exemple de la parabole d'équation $y = x^2$.



• Deux fonctions f et g, définies sur les intervalles I et J, sont égales lorsque :
 $I = J$;
 pour tout x de I, $f(x) = g(x)$.

2) Sens de variation

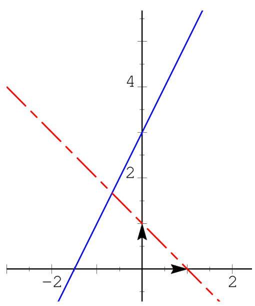
• Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
La fonction f est croissante sur I signifie que, pour tous réels a et b de I :
 si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ **(conservation de l'ordre).**
La fonction f est décroissante sur I signifie que, pour tous réels a et b de I :
 si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$.**(inversion de l'ordre)**.
Une fonction monotone sur I est une fonction qui est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

• Étudier les variations d'une fonction, c'est préciser les intervalles sur lesquels la fonction est monotone. On peut résumer ces résultats dans un tableau de variation.

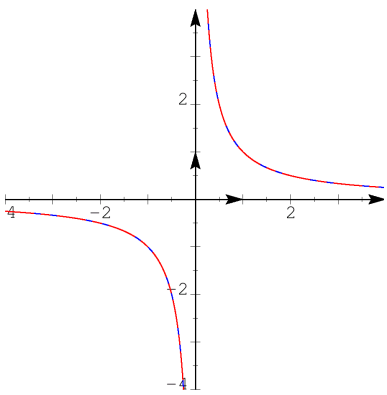
• Si, pour tout x d'un intervalle I, on a $f(x) \leqslant f(c)$, on dit que $f(c)$ est un maximum de la fonction f sur I.
Autrement dit, $f(c)$ est le maximum des valeurs de f sur l'intervalle I.
Si, pour tout x d'un intervalle I, on a $f(x) \geqslant f(c)$, on dit que $f(c)$ est un minimum de la fonction f sur I.

II. <u>Les fonctions de référence</u>

• La fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$ et décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$. Elle est représentée par une droite.



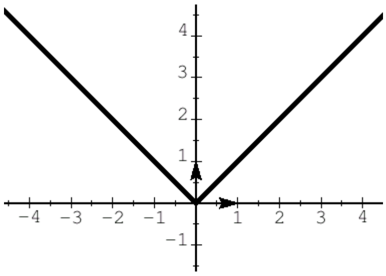
• La fonction carrée $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. Elle est représentée par une parabole de sommet l'origine du repère.



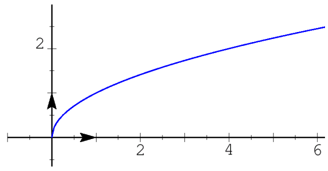
La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Elle est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$, ainsi que sur $]0\,;\,+\infty[$. Elle est représentée par une hyperbole.

- La fonction cube $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.



- La fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur [0 ; +∞[est croissante sur $\mathbb{R}^+$.



- La fonction valeur absolue est décroissante sur]–∞ ; 0], et croissante sur [0 ; +∞[.

III. Opérations sur les fonctions

1) Somme et produit par un réel

Soit u et v deux fonctions définies sur le même intervalle I et k un nombre réel quelconque.

- **Définitions**

> La fonction notée $u + v$ associe au réel x de I le réel $u(x) + v(x)$, ce que l'on peut écrire $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$.
> La fonction notée ku associe au réel x de u le réel $k \times u(x)$, ce que l'on peut écrire $(ku)(x) = k \times u(x)$.

- **Théorèmes sur les variations**

> (1) Si u et v sont croissantes sur I, alors la fonction $u + v$ est aussi croissante sur I.
> Si u et v sont décroissantes sur I, alors la fonction $u + v$ est aussi décroissante sur I.
> (2) Si $k > 0$, les fonctions u et ku ont les mêmes variations sur I.
> Si $k < 0$, les fonctions u et ku ont des variations contraires sur I.

Remarque
On ne peut rien conclure quant au sens de variation de $u + v$ lorsque u et v ne varient pas dans le même sens.

2) Produit et quotient de fonctions

Soit u et v deux fonctions définies sur le même intervalle I.

- **Définitions**

> La fonction notée uv ou $u \times v$ associe au réel x de I le réel $u(x) \times v(x)$, ce que l'on peut écrire $(uv)(x) = u(x)v(x)$.
>
> Si $v(x)$ n'est pas nul sur l'intervalle I, la fonction notée $\frac{u}{v}$ associe à x le réel $(\frac{u}{v})(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

- **Variations de ces fonctions**

On ne dispose par de résultats généraux : la seule connaissance des variations de u et v ne permet pas de conclure quant aux variations des fonctions uv et u/v.

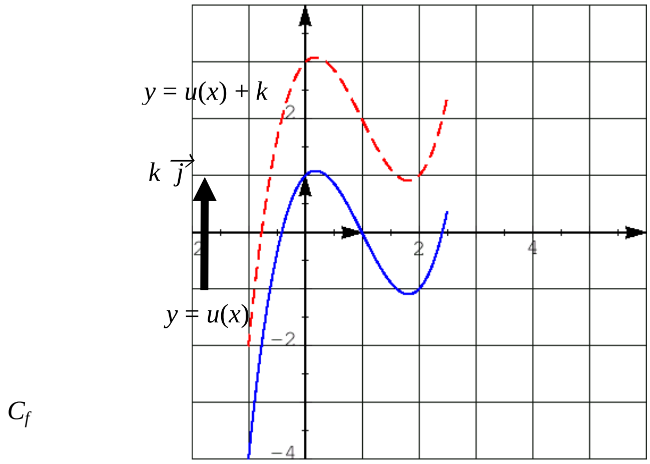
IV. Fonctions associées

Soit u une fonction définie sur un intervalle dont la courbe représentative dans un repère orthogonal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ est appelée C_u. On considère un réel k quelconque.

1) Fonction définie par f(x) = u(x) + k

- **Théorème**

> La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = u(x) + k$ est l'image de la courbe C_u par la translation de vecteur $k\vec{j}$.



Remarque
Les fonctions u et $f = u + k$ sont définie sur le même intervalle I ; sur cet intervalle, elle ont le même sens de variation.

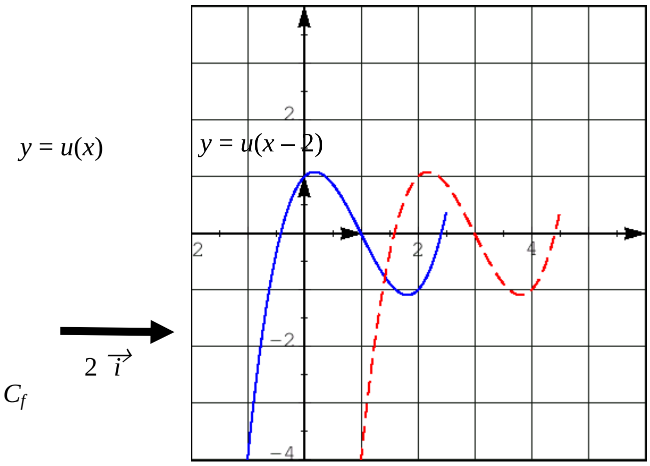
2) Fonction définie par f(x) = u(x + k)

Théorème

> La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = u(x + k)$ est l'image de la courbe C_u par la translation de vecteur $-k\vec{i}$.

Remarque
Si u est définie sur un intervalle I, alors f est définie sur l'ensemble des x tel que $x + k$ appartienne à I.
Ainsi si u est définie sur l'intervalle [0; 2], alors la fonction f définie par $f(x) = u(x + 3)$ est définie sur l'ensemble des x tels que $x + 3$ appartienne à [0; 2], c'est-à-dire [–3 ; –1].

Exemple de courbe avec k = –2



La fonction initiale u est définie sur]–∞ ; 2,5] ; la fonction f est définie]–∞ ; 4,5].

V. <u>Composition de deux fonctions</u>

1) Définition

- La composition des fonctions correspond au schéma suivant, où l'on *enchaine* successivement les fonctions (d'abord u, puis v) :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] & u(x) \arrow[r, "v"] & v(u(x)) \end{tikzcd}$$

> La fonction notée $v \circ u$ est la fonction composée qui au réel x associe le réel $v(u(x))$.

Autrement dit, $\mathbf{(v \circ u)(x) = v(u(x))}$

- *Le problème de l'ensemble de définition*

On suppose que la fontion u est définie sur I et que la fonction v est définie sur J.
Pour calculer $v(u(x))$, on doit

Pour calculer $u(x)$, x doit appartenir à I, ensemble de définition de u ;
Pour pouvoir calculer $v(u(x))$, $u(x)$ doit être lui-même être dans J.

- *Exemple*

Déterminons $v \circ u$ avec $u(x) = \sqrt{x+1}$ définie sur $[-1 ; +\infty[$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Déterminons l'ensemble de définition.
On doit d'abord pouvoir calculer $u(x)$, c'est possible pour $x \geqslant -1$.
Par ailleurs, pour calculer $v(u(x)) = \dfrac{1}{u(x)}$, $u(x)$ doit nécessairement être non nul, c'est-à-dire que x doit être différent de -1.
L'ensemble de définition de $v \circ u$ est $]-1 ; +\infty[$.

Quelle serait la fonction $u \circ v$, et son ensemble de définition ?

2) Théorèmes sur les variations

> (1) Si u et v varient dans le même sens, alors la fonction composée $v \circ u$ est croissante sur I.
> (2) Si u et v varient en sens contraire, alors la fonction composée $v \circ u$ est décroissante sur I.

On peut résumer les résultats précédents dans un tableau :

Fonction v / **Fonction u**	**Croissante**	**Décroissante**
Croissante	$v \circ u$ croissante	$v \circ u$ décroissante
Décroissante	$v \circ u$ décroissante	$v \circ u$ croissante