A) Utilisation de la meilleure approximation affine de *f* en *a*

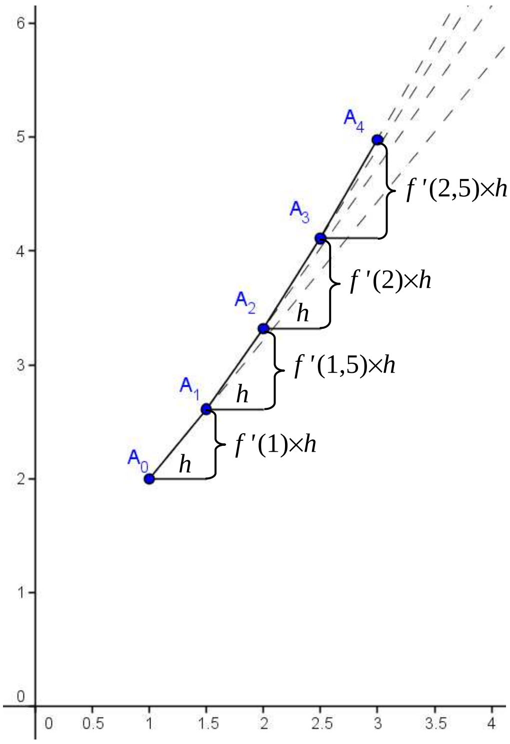
On suppose que f est une fonction dérivable sur $I = [1 ; 5]$, $f(1) = 2$ et,

pour tout x dans $[1 ; 5]$, $f'(x) = \sqrt{x}$.

f étant dérivable sur $[1 ; 5]$, pour tout réel a, on a l'approximation :

pour h voisin de 0, $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\times h$,

c'est-à-dire $f(a + h) \approx f(a) + \sqrt{a}\times h$



En prenant par exemple $h = 0,5$ on obtient successivement :

$f(1,5) \approx f(1) + \sqrt{1}\times 0,5$ soit $f(1,5) \approx 2,61$

$f(2) \approx f(1,5) + \sqrt{1,5}\times 0,5$ soit $f(2) \approx 3,32$

$f(2,5) \approx f(2) + \sqrt{2}\times 0,5$ soit $f(2,5) \approx 4,11$

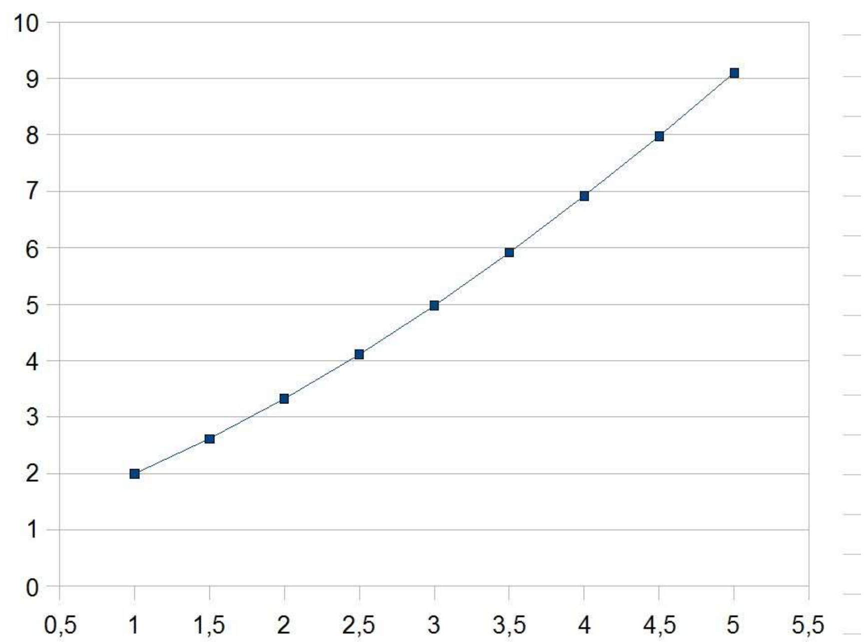
etc …

En plaçant les points $A_0(1 ; 2)$, $A_1(1,5 ; 2,61)$, $A_2(2 ; 3,32)$, … dans un repère du plan et en traçant les segments joignant deux points consécutifs, on obtient une courbe C_g représentant une fonction g affine par intervalles qui constitue une approximation de la courbe C de f sur $[1 ; 5]$.

1) Utilisation d'un tableur

La valeur du pas h sera donnée dans une cellule comme sur la capture d'écran ci-dessous.

	A	B
1	pas =	0,5
2		
3	***x***	***g*(*x*)**
4	1	2
5	1,5	2,61
6	2	3,32
7	2,5	4,11
8	3	4,98
9	3,5	5,91
10	4	6,91
11	4,5	7,97
12	5	9,09



Représenter la courbe C_g obtenue en prenant un pas de 0,2 ; puis un pas de 0,05.

La méthode d'Euler

2) <u>Evaluation de l'erreur commise</u>

On peut démontrer (*cf* partie B) que la fonction f, solution de l'équation initiale, est définie sur [1 ; 5] par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{4}{3}.$$

Représenter sur le graphique contenant C_g la courbe de la solution f.

En complétant la feuille de calcul du tableur, donner des valeurs approchées de l'erreur commise quand on remplace $f(x)$ par son approximation $g(x)$.

Observer l'évolution de cette erreur si on modifie le pas.

B) Une démonstration du A) 2)

f est une fonction dérivable sur [1 ; 5] telle que :

$$f(1) = 2 \text{ et, pour tout réel } x \text{ appartenant à } [1\ ;\ 5],\ f'(x) = \sqrt{x}.$$

1) Soit h la fonction définie sur [1 ; 5] par :

$$\text{pour tout } x \in [1\ ;\ 5],\ h(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

Démontrer que h est dérivable sur [1 ; 5] et déterminer sa fonction dérivée.

2) On considère la fonction φ définie sur [1 ; 5] par $\varphi = f - h$.

a) Etablir que φ est dérivable sur [1 ; 5] et justifier que φ est une fonction constante.

b) En déduire que pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{4}{3}.$$

C) Application à la cinématique

Un caillou est lancé en l'air du haut d'une falaise de 40 mètres de hauteur qui surplombe la mer, à l'instant $t = 0$s.

On note $f(t)$ l'altitude en mètres du projectile en fonction du temps t, $t \geqslant 0$, ainsi $f(0) = 40$ m.

La vitesse instantanée du caillou est donnée à l'instant t, $t \geqslant 0$, par :

$$v(t) = f'(t) = 10 - 5t \text{ (en m.s}^{-1}\text{)}.$$

1) Utiliser la méthode d'Euler décrite dans le A) pour représenter graphiquement une courbe approchée de celle de f.

2) Au bout de combien de temps (environ) le caillou touchera-t-il l'eau ?

Les falaises d'Etretat