

Graphes probabilistes – Matrices de transition

Exemple 24 du document d'accompagnement des programmes.

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable mais la ville Y offre de meilleurs salaires. 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un cadre de vie meilleur et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

1) Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X , calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5, 10 ans.

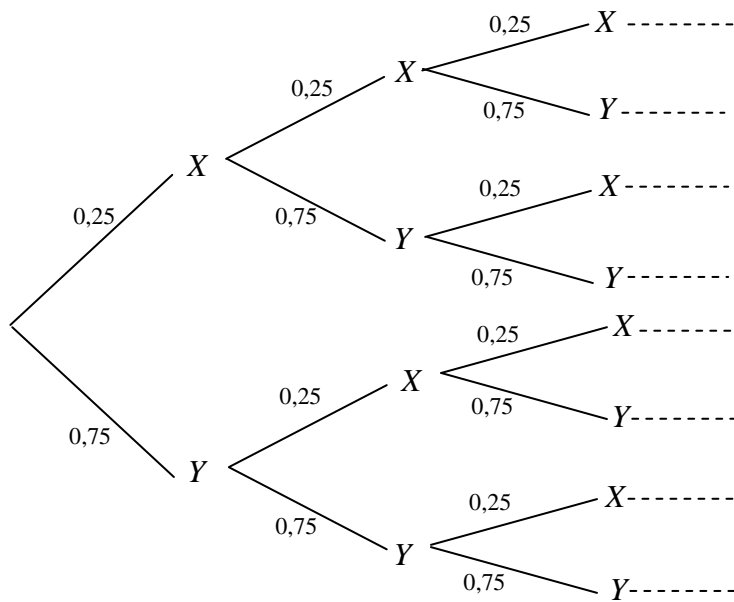
2) Que se passe-t-il si on suppose que 99% des habitants sont initialement en Y ou en X ? Que la population est également répartie entre les deux villes (500 000 habitants dans chaque ville en l'année 0) ?

Que constate-t-on ?

Remarque : on suppose que l'échange décrit est constant pendant un certain nombre d'années, et que dans chaque ville, le solde naissances-décès est nul.

Comment traiter cet exercice avec les élèves ?

Avec un arbre



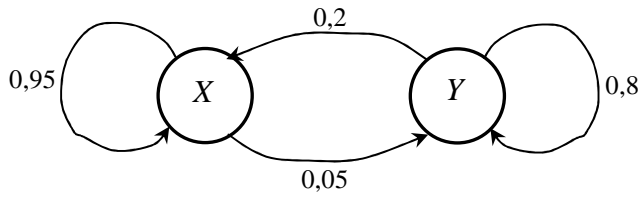
Au bout d'un an, les proportions sont donc :

En X : $0,25 \times 0,95 + 0,75 \times 0,2 = 0,3875$ soit 38,745%

En Y : $0,25 \times 0,05 + 0,75 \times 0,8 = 0,6125$ soit 61,25%

Au bout de deux ans, cinq ans et dix ans la représentation par un arbre et les calculs deviennent rapidement très lourds.

Avec un graphe



On note x_n la part de la population de la ville X dans la population totale et y_n celle de la ville Y .

A l'aide du graphe, on trouve l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n .

$$x_{n+1} = 0,95x_n + 0,2y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 0,05x_n + 0,8y_n$$

Avec une matrice dite de transition

P_n est la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$.

On montre que $P_{n+1} = M.P_n$

Avec la calculatrice ou un tableur, on peut calculer M^2, M^5, \dots et en déduire P_2, P_5, \dots

Grâce à ces calculs, il semble que quel que soit l'état initial considéré, la répartition de la population, au bout de 10 ans est proche d'une même valeur.

La résolution de $P = M.P$ où $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ conduit à celle d'un système $\begin{cases} x = 0,95x + 0,2y \\ y = 0,05x + 0,8y \end{cases}$

Ainsi $x = 4y$ or $x + y = 1$ donc $x = 0,8$ et $y = 0,2$.

Quel que soit l'état initial, au bout d'un nombre d'année suffisamment grand, la population de la ville X se stabiliserait vers 800 000 habitants, tandis que celle de la ville Y se stabiliserait vers 200 000 habitants.

Avec Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	A			P_0			
2	0,95	0,2			500000		
3	0,05	0,8			500000		
4							
5	n		A^n			P_n	
6		2		0,9125	0,35		575000
7				0,0875	0,65		425000
8							
9		3		0,884375	0,4625		673437,5
10				0,115625	0,5375		326562,5
11							
12		4		0,86328125	0,546875		705078,125
13				0,13671875	0,453125		294921,875
14							
15		5		0,84746094	0,61015625		728808,594
16				0,15253906	0,38984375		271191,406
17							
18		6		0,8355957	0,65761719		746606,445
19				0,1644043	0,34238281		253393,555
20							
21		7		0,82669678	0,69321289		759954,834
22				0,17330322	0,30678711		240045,166
23							
24		8		0,82002258	0,71990967		769966,125
25				0,17997742	0,28009033		230033,875
26							
27		9		0,81501694	0,73993225		777474,594
28				0,18498306	0,26006775		222525,406
29							
30		10		0,8112627	0,75494919		783105,946
31				0,1887373	0,24505081		216894,054
32							

Avec Derive

The screenshot shows the Derive 5 software interface with the following content:

- Window Title:** Derive 5 - [Algèbre 1]
- Menu Bar:** Fichier, Edition, Insérer, Auteurs, Simplifier, Résoudre, Calculer, Déclarer, Options, Fenêtre, Aide
- Toolbar:** Includes icons for file operations, mathematical symbols (lim, ∂, ∫, Σ, Π), and a help icon.
- Input/Output:**
 - #1: $\begin{bmatrix} 0.95 & 0.2 \\ 0.05 & 0.8 \end{bmatrix}$
 - #2: $a := \begin{bmatrix} 0.95 & 0.2 \\ 0.05 & 0.8 \end{bmatrix}$
 - #3: $\begin{bmatrix} 500000 \\ 500000 \end{bmatrix}$
 - #4: $p := \begin{bmatrix} 500000 \\ 500000 \end{bmatrix}$
 - #5: $c := a^{20}$
 - #6: $c := a^{20}$
 - #7: $\begin{bmatrix} 0.8006342423 & 0.7974630304 \\ 0.1993657576 & 0.2025369695 \end{bmatrix}$
 - #8: $c \cdot p$
 - #9: $c \cdot p$
 - #10: $\begin{bmatrix} 7.990486364 \cdot 10^5 \\ 2.009513635 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$
- Status Bar:** Shows "Approx(#9)" and a timer "0.000s".
- Bottom Panel:** Contains mathematical symbols for comparison and equality.

Avec une suite arithmético-géométrique

On a $x_{n+1} = 0,95x_n + 0,2(1-x_n)$
donc $x_{n+1} = 0,75x_n + 0,2$.

En utilisant la suite $v_n = x_n - 0,8$, celle-ci est géométrique de raison 0,75 et on montre que (x_n) converge vers 0,8.

Puisque $y_n = 1 - x_n$, (y_n) converge vers 0,2.

Avec Derive

The screenshot shows the Derive 5 software interface with the following content:

```
#1: x(n) :=  
If n = 0  
500000  
0.95 * x(n - 1) + 0.2 * y(n - 1)  
#2: y(n) :=  
If n = 0  
500000  
0.05 * x(n - 1) + 0.8 * y(n - 1)  
#3: x(1)  
#4: 5.75 * 10^5  
#5: y(1)  
#6: 4.25 * 10^5  
#7: x(10)  
#8: 7.831059455 * 10^5  
#9: x(30)  
#10: y(10)  
#11: 2.168940544 * 10^5
```

The software window title is "Derive 5 - [Algèbre 3 matrices (suites).mth [Lecture Seule]]". The menu bar includes "Fichier", "Edition", "Insérer", "Auteur", "Simplifier", "Résoudre", "Calculer", "Déclarer", "Options", "Fenêtre", and "Aide". The toolbar contains various mathematical symbols and icons. The status bar at the bottom right shows "Utilisateur".