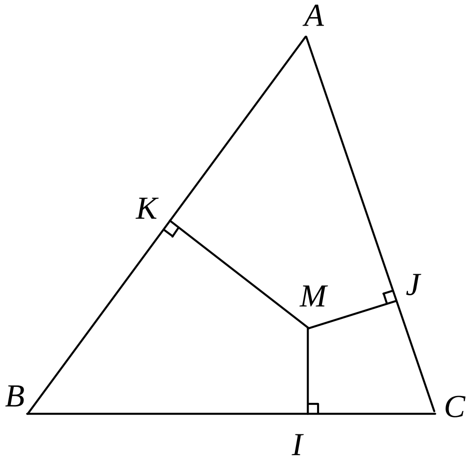
Devoir Terminale S, spécialité Mathématiques

On considère un triangle ABC quelconque. Un point M varie sur et à l'intérieur du triangle. On souhaite maximiser le produit des distances du point M aux côtés du triangle.



On note a, b et c les longueurs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ du triangle, u, v, w et S les aires des triangles MBC, MCA, MAB et ABC.

On cherche la position du point M pour rendre maximal le produit

$$P = KM \times IM \times JM.$$

1) Montrer que P peut s'écrire sous la forme

$$P = \frac{8}{abc}uvw = \frac{8}{abc}uv(S - u - v)$$

On note f la fonction de deux variables définie pour tous réels x et y de $[0;S]$ tels que $x + y \leqslant S$ par

$$f(x;y) = xy(S - x - y)$$

Montrer que la recherche du maximum de P revient à rechercher le maximum de f.

2) On désigne par $(\mathscr{S})$ la surface de l'espace représentant la fonction f.

a) Démontrer que les courbes d'intersection de $(\mathscr{S})$ avec le plan (xOy) sont des droites.

b) la surface $(\mathscr{S})$ présente-t-elle des symétries ? Pourquoi ?
Représenter à l'aide d'un tableur ou du logiciel Dérive cette surface (Vous pourrez prendre $S = 1$ pour cette représentation).

c) Soit $t \in [0;S]$. On note C_t l'image par la projection orthogonale de la courbe intersection du plan d'équation $y = t$ et de S sur le plan (xOz).
Démontrer que C_t a pour équation $z = xt(S - x - t)$

d) Etudier la fonction g définie par $g(x) = xt(S - x - t)$ pour $x \in [0;S]$.
Démontrer que g admet un maximum pour $x = \dfrac{S - t}{2}$ et que $g\left(\dfrac{S - t}{2}\right) = \dfrac{1}{4}t(S - t)^2$.

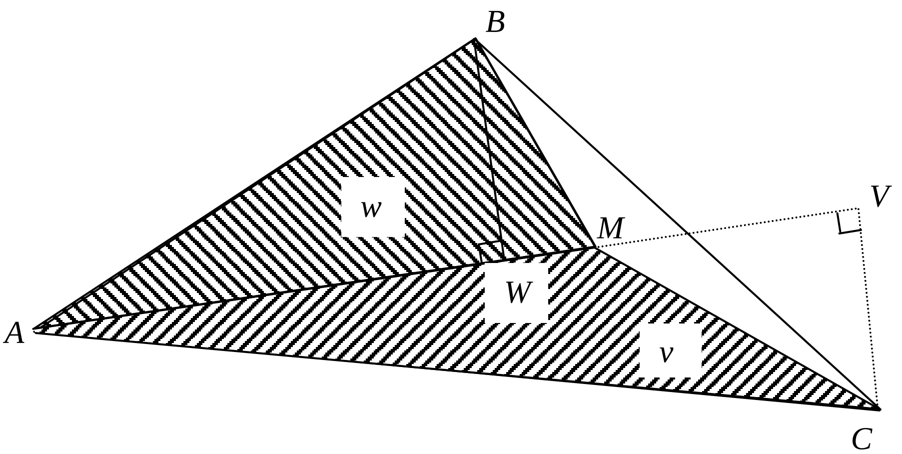
e) Etudier la fonction h définie pour tout $t \in [0;1]$ par $h(t) = \dfrac{1}{4}t(S - t)^2$.

f) En déduire les valeurs de x et de y qui rendent maximale $f(x;y)$.

g) Conclure sur les valeurs que doivent prendre u, v et w pour que le produit P soit maximal.

On a montré ainsi la valeur maximale du produit uvw sachant que la somme $u + v + w = S$ est constante.

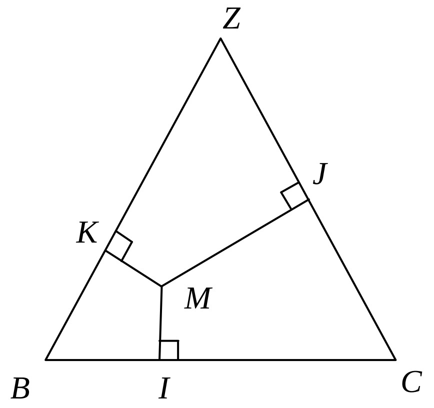
3) Il reste à trouver la (ou les) positions du point M dans ce cas.



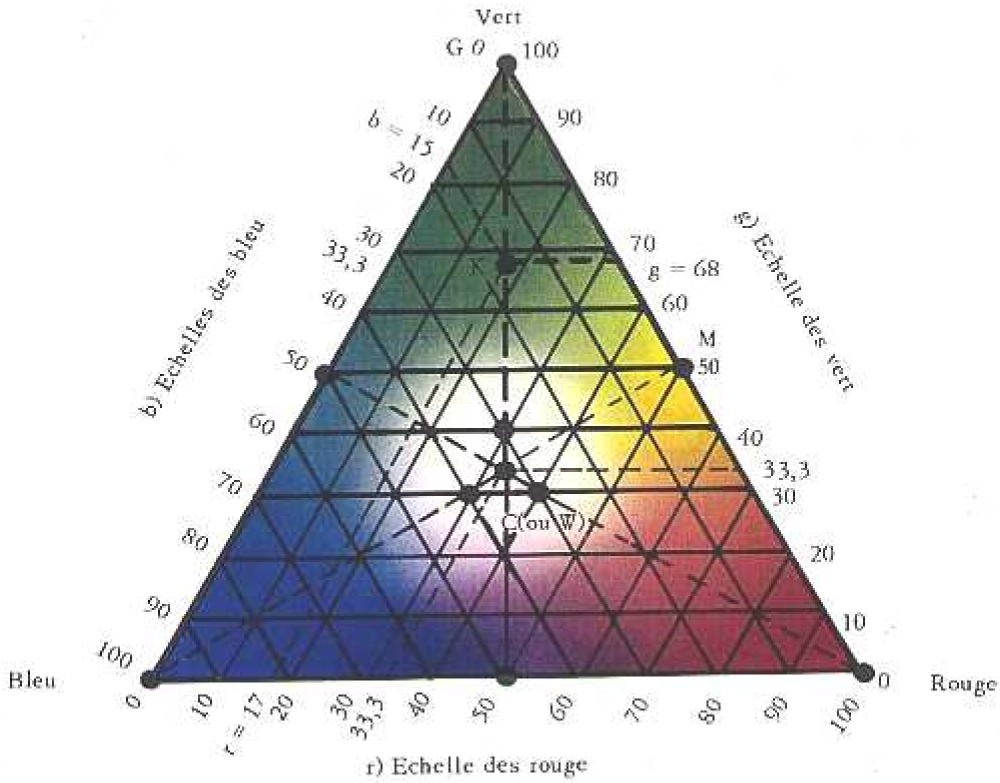
a) A l'aide de l'égalité des aires w et v et en utilisant la base commune $[AM]$ des deux triangles, déterminer la nature du quadrilatère $ABCV$ puis de la droite (AM) dans le triangle ABC.

b) En déduire la position du point M pour que le produit $P = uvw$ soit maximal.

4) Reprenons la situation initiale pour un triangle équilatéral *ABC* de côté *a*.
M est un point quelconque à l'intérieur d'un triangle équilatéral *ABC*.
I, *J* et *K* sont encore les projeté orthogonaux sur les côtés du triangle.
En calculant de deux manières l'aire du triangle *ABC*, montrer que *MK* + *MI* + *MJ* est constant, c'est-à-dire ne dépend pas du point *M*.
On a montré ainsi la valeur maximale du produit uvw sachant que la somme u + v + w est constante pour le triangle équilatéral.



Application : On utilise cette propriété de somme constante pour la représentation trichromatique des couleurs.
Dans le système de couleurs primaires *R*, *G* et *B* (pour Red, Green et Blue, couleurs primaire soustractives, sur fond noir, comme sur le moniteur d'un ordinateur) sont des entiers entre 0 et *N* ; *N* est du type $2^k - 1$, comme 255 pour la plus faible définition.
On pose alors $r = \dfrac{R}{R+G+B}$, $g = \dfrac{G}{R+G+B}$ et $b = \dfrac{B}{R+G+B}$.
On a $r + g + b = 1$.
Dans un triangle approprié, *r*, *g* et *b* peuvent être représentées par les longueurs *MI*, *MJ* et *MK*.



Les parallèles aux côtés sont les nuances de teintes lorsque l'intensité de l'une des couleurs est fixée.