Activité Seconde/Première

Partie A

Soient x et y deux réels positifs tels que $S = x + y$ est fixée.
On chercher à trouver x et y pour que le produit $P = xy$ soit maximal.

1) a) A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire deux segments de longueurs x et y dont la somme est fixée, par exemple égale à 10.
   b) A l'aide des commandes algébriques, faire afficher le produit entre ces deux longueurs.
   c) Conjecturer de la valeur à donner à x et y pour que le produit soit maximal. Vous pourrez faire varier la somme S pour confirmer cette conjecture.

2) Démonstration

Soit m la moyenne (arithmétique) des deux réels x et y quelconques tels que $x + y = S$.
   a) Montrer que $S = 2m$.
   b) En déduire que x et y sont nécessairement : soit égaux à m, soit si l'un est strictement supérieur à m, l'autre est strictement plus petit que m.
   Montrer dans ce cas que x et y sont de la forme $m + h$ et $m – h$ avec h réel.
   c) Calculer $P = xy$ et en déduire la valeur à donner à h pour que le produit P soit maximal.

3) Utilisation

M. Daudet souhaite délimiter une zone rectangulaire par une clôture dans un très grand champ pour sa chèvre. Il dispose d'une longueur de 50 m de clôture.
Quelle forme doit-il donner à la zone clôturée pour permettre d'offrir un maximum d'herbe à sa chèvre ?

Partie B

On s'intéresse maintenant aux valeurs à donner à trois réels x, y et z, de somme fixée S, dont on cherche à rendre maximal le produit $P = xyz$.
On note encore m la moyenne arithmétique de ces trois réels.

1) Soient deux nombres de la forme $m – h$ et $m + k$ avec m, h et k trois réels strictement positifs.
   Montrer que le produit de ces deux nombres est inférieur au produit des nombres m et $m + k – h$.
2) En déduire, en reprenant un raisonnement analogue à celui de la partie A, les valeurs à donner à x, y et z pour que le produit $P = xyz$ soit maximal.
3) Utilisation

Soit ABC un triangle
On suppose que $[BC]$ est le plus petit côté et que le projeté K de B sur (AC) appartient à (AC) (il existe une façon de nommer les sommets du triangle ABC pour qu'il en soit ainsi). On a $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
On note enfin $h = BK$ et $x = CK$.

a) En pratiquant deux fois le théorème de Pythagore, montrer que

$$x = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}$$

   Déterminer alors la hauteur h du triangle.

b) Soit A l'aire du triangle ABC.
   Déduire des résultats précédents que l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC vérifie :

$$\mathscr{A}^2 = \frac{1}{16}(a + b + c)\ (a + b - c)\ (b + c - a)\ (c + a - b)$$

Puis

$$\mathscr{A} = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)} \quad \text{(formule d'Héron d'Alexandrie)}$$

c) Parmi tous les triangles de périmètre fixé, quel est celui d'aire maximale ?