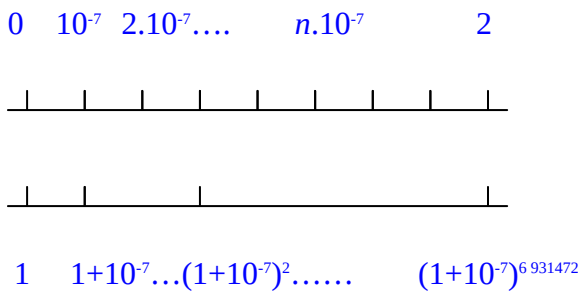
Le logarithme

1. Introduction.

La progression arithmétique des exposants d'une suite géométrique était déjà connue par *Archimède* et elle fut redécouverte par *Stifel* en 1544. L'Ecossais *John Napier* (ou *Neper*) poursuivit dans cette voie dans le but de simplifier les calculs astronomiques. Son traité de 1614 : *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* construit donc le logarithme[1] d'un sinus.

Neper considère deux lignes parallèles. La première est engendrée par le mouvement d'un point qui décrit des espaces qui augmentent comme le temps (manière cinématique de former une progression arithmétique). La seconde est engendrée par le mouvement d'un point qui décrit des espaces en progression géométrique. Il suppose pour simplifier que les vitesses de ces mobiles sont égales. Pour trouver le logarithme d'un nombre il suffit donc de le placer sur la première échelle et de repérer quelle graduation lui correspond sur l'échelle géométrique.



Lagrange note, pour présenter la méthode de *Neper*, que

> *Si on prend pour les deux premiers termes de la progression géométrique les nombres très peu différents* 1 *et* 1,0000001, *et pour ceux de la progression arithmétique,* 0 *et* 0,0000001 *; et qu'on cherche successivement par les règles connues tous les termes suivants des deux progressions, ont trouve que le nombre* 2 *est à la huitième décimale près le* 6 931472[e] *de la progression géométrique : de sorte que le logarithme de* 2 *est* 0,693 147 2 *de la même progression.*

Comme l'illustre l'exemple de *Lagrange*, l'intuition de *Neper* consiste à approcher, par le biais de la représentation cinématique, une grandeur continue par une mesure discrète. Mais le logarithme qui possède ainsi ses tables n'a pas encore tous les attributs d'une fonction. Il n'est pas représenté par un symbole autonome qui puisse l'agréger à l'algèbre. Mais comme l'indique Amy Dahan

> *Il ne fallut qu'une vingtaine d'années* [ensuite] *pour que Fermat et Descartes en appliquant cette nouvelle algèbre à la géométrie introduisent la méthode analytique d'étude des fonctions. .*

2. Définition fonctionnelle du logarithme.

Puisqu'il s'agit de transformer les produits en somme, recherchons les fonctions f définies et dérivables sur $]0;+\infty[$ qui vérifient la propriété 1 suivante :
pour tout couple de réels strictement positifs a et b, $f(a) + f(b) = f(ab)$.
Proposition (et définition): Les fonctions solutions du problème précédent sont toutes les fonctions proportionnelles à la fonction ln : $x \rightarrow \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ qu'on appelle fonction logarithme népérien.

Démonstration :

[1] Les logarithmes ont été découverts à la même époque par le suisse Jobst Bürgi (1552-1632, assistant de Kepler à Prague) qui ne laissa que des tables sans considération théoriques.

Soit f une solution du problème. En prenant $a = b = 1$ dans la relation, la fonction f doit vérifier $f(1) = 2\,f(1)$ soit $f(1)=0$.
Soit $a > 0$ fixé, on peut écrire pour tout x strictement positif, $f(ax) = f(a) + f(x)$. La fonction f étant dérivable sur $]0;+\infty[$, en dérivant par rapport à la variable x, on trouve $af'(ax) = f'(x)$.
Ainsi, en prenant $x = 1$, $f'(a) = \dfrac{f'(1)}{a}$.

La fonction recherchée est alors la primitive de $x \to \dfrac{f'(1)}{x}$ continue sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 elle est donc de la forme : $x \to \lambda \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, λ désignant un réel quelconque fixé.

On vérifie, réciproquement, que toutes ces fonctions (qui constituent la famille des fonctions logarithmes) conviennent.

Propriété 2 : l'image d'une suite géométrique par toute fonction logarithme est une suite arithmétique.

3. Le logarithme décimal.

Les fonction logarithmes sont donc toutes proportionnelles entre elles. Laquelle doit-on choisir ? Si l'on utilise beaucoup le calcul différentiel, on fait le choix de la fonction qui a la dérivée la plus simple et l'on privilégie le logarithme népérien. Si l'on se contente de la propriété 2, on choisit la fonction qui transforme la suite géométrique la plus courante (celle des puissances de dix) en la suite arithmétique la plus simple (celle des entiers naturels). On prend donc f(10)=1 *et la constante* $\lambda = \dfrac{1}{\ln 10}$. *Cette nouvelle fonction s'appelle le logarithme décimal et se note* log.

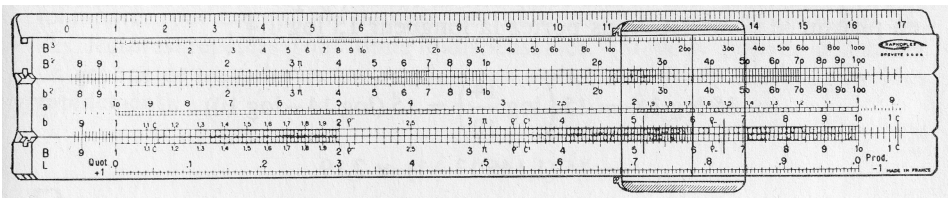
L'anglais Henry Briggs (1556-1630), élève de Neper publia dans l'*Arithmetica logarithmica* (1624) les premières tables de logarithmes décimaux des entiers jusqu'à 101 000 avec 14 décimales.

Un exemple de calcul de Briggs.
Pour calculer le logarithme d'un nombre entier, par exemple log 2, il considère l'encadrement :
Si 2^n comporte k chiffres dans son écriture décimale, on peut écrire $10^{k-1} \leqslant 2^n \leqslant 10^k$
alors $\dfrac{k-1}{n} \leqslant \log 2 \leqslant \dfrac{k}{n}$ et la précision augmente d'autant plus que l'entier n est grand

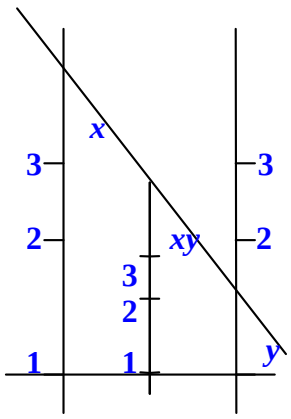
Des applications :

A. La règle à calcul fut la compagne de l'ingénieur pendant tout le dix-neuvième siècle et plus de la moitié du vingtième.
On pourrait demander aux élèves de comparer la précision que permettait la règle et celle des tables ordinaires (avec ou sans interpolation linéaire) pour divers calculs de travaux dirigés de Physique.

Sur cette règle coulisse une réglette qui portent toutes deux comme graduations des échelles logarithmiques.



On appelle abaque logarithmique des échelles logarithmiques groupées suivant des dispositifs qui permettent d'obtenir graphiquement les résultats de certains calculs.
Si par exemple on construit deux échelles logarithmiques identiques sur deux droites perpendiculaires à un segment [*A*,*B*] et si l'on place sur la médiatrice [*A*,*B*], une échelle logarithmique homothétique dans un rapport $\frac{1}{2}$, on lit le produit de deux nombres *x* et *y* situés sur chaque échelle latérale se lit sur la règle centrale.



On trouve encore des abaques[2] logarithmiques plus sophistiqués notamment le *Compteur Universel* de *Lalanne*.

B. La loi de Weber-Fechner, physiciens allemands Weber (1804-1891) et Fechner (1801-1887)
Elle indique que la "*sensation perçue par l'oreille varie comme le logarithme de l'excitation*" ce qui permet d'écrire que les variations d'intensités varient comme celles des logarithmes des puissances, soit :

$$I_2 - I_1 = \log P_2 - \log P_1 = \log \frac{P_2}{P_1}$$

où *P* est exprimée en watts et *I* en Bel (du nom de Graham Bell, inventeur du téléphone 1847–1922)
Puis, en ramenant cette dernière unité en décibel (dB), on obtient $I_2 = I_1 + 10\log \frac{P_2}{P_1}$
Si l'on considère un son de référence qui a pour intensité le seuil d'audibilité c'est-à-dire un son de 0 dB pour un puissance de 10^{-12} watts, on trouve finalement $I = 10\log \frac{P_2}{P_1}$

On peut alors remarquer que, puisque les puissances de sons audibles varient entre 10^{-12} et 10 watts, ces sons s'étendent sur une échelle de 0 à 120 dB.

C. Logarithme et musique
Une référence en musique est la gamme. Un ensemble de sons ayant des hauteurs (graves ou aiguës) différentes et possédant des rapports "harmonieux". Leur émission doit former des mélodies agréables à l'oreille qui est sensibles aux variations de notes.

La notion d'intervalle de fréquences en musique ancienne est basée sur les fréquences obtenues par fractionnement d'une corde vibrante de longueur a_0 (ou du tuyau d'un orgue ou d'un instrument à vent). Soit f_0 la fréquence du son associé à la longueur a_0 de la corde.
Notons f_k la fréquence associée à la longueur a_k de la corde. On démontre que les fréquences sont in versement proportionnelles aux longueurs : $\frac{f_k}{f_0} = \frac{a_0}{a_k}$

Lorsque ce rapport est égal à 2, l'intervalle s'appelle alors une octave, s'il est égal à $\frac{3}{2}$, il forme une quinte, … Ils se forment ainsi des repères permettant de passer d'une gamme à une autre

[2] Une référence se trouve dans le cours de Mathématiques Générales de Robert DELTHEIL, (Faculté des Sciences de Toulouse) 1925.

Un problème s'est longtemps posé aux musiciens, celui de reproduire une mélodie sur plusieurs instruments ou voix. Il était alors nécessaire d'adapter cette mélodie en la déplaçant vers l'aigu ou le grave sans dénaturer l'œuvre initiale.

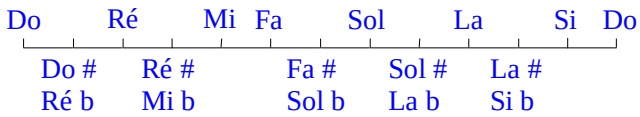
Andreas Weickmeister imagina en 1691 son échelle (mais la paternité revint au prince chinois Tchou Tsai You qui la proposa près d'un siècle plus tôt en 1596).

Une des premières échelle musicale est l'échelle pythagoricienne dans laquelle on a une succession alternée de quintes montantes (de nouvelles fréquences f' obtenues par $f' = \frac{3}{2} f$) et de quartes descendantes (telles que $f' = \frac{3}{4} f$) ce qui, ramené à une octave donne :

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f	$\frac{9}{8}f$	$\frac{81}{64}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{27}{16}f$	$\frac{243}{128}f$	$2f$

Mais cette gamme ne permettait pas de transposer les mélodies d'un demi-ton (demi-octave ou demi-quinte)

Cette gamme qui divise l'octave en 12 intervalles équivalents et donc de répartir "régulièrement" les douze notes dans la gamme, elle est alors nommée gamme tempérée (de tempérament égal). La suite des fréquences (f_i) des différentes notes de la gamme est alors une suite géométrique de raison $2^{1/12}$.
En prenant pour f_0 la fréquence du do, on obtient la gamme :



4. Les fonctions logarithmes et exponentielles

Comme les fonctions log réalisent des bijections strictement croissantes de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, on peut définir les fonctions réciproques.
On peut ainsi définir la fonction exponentielle comme la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
Pour tous x réel strictement positif et y réel, on a $y = \ln x$ si et seulement si $x = \exp(y) = e^y$

On peut ensuite définir les fonctions plus générales $x \to a^x = e^{a\ln x}$ lorsque $a > 0$
On a $x = \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$ qui est appelée la fonction logarithme de base a.
Si $a = e$, $\ln(e) = 1$ et on obtient que la fonction ln est la fonction logarithme de base e.

Considérons f une fonction logarithme de base quelconque et g la fonction exponentielle réciproque.
On a pour tous x et y réel strictement positifs, $f(xy) = f(x) + f(y)$
Posons $X = f(x)$ et $Y = f(y)$ où $X \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbb{R}$, on a successivement

$$g(f(xy)) = g(f(x) + f(y))$$
$$xy = g(X + Y)$$
$$g(X)g(Y) = g(X + Y)$$

et les fonctions exponentielles transforment les sommes en produit comme on s'y attendait.

5. La fonction logarithme est irrationnelle

La fonction logarithme ne peut s'écrire sous la forme d'une fonction rationnelle.

Raisonnons par l'absurde et supposons que ce soit le cas, on peut alors écrire $\ln(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, quotient de polynômes que l'on suppose irréductibles.

On a alors, en dérivant les deux membres de l'expression $\frac{1}{x} = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$ ce qui permet d'écrire $q^2(x) = x[p'(x)q(x) - p(x)q'(x)]$

Comme x est un facteur de $q^2(x)$, il l'est encore de $q(x)$ (*)

Ainsi x est facteur de $p'(x)q(x) - p(x)q'(x)$ donc de $p(x)q'(x)$

On a supposé $p(x)$ et $q(x)$ irréductible, x n'est donc pas un facteur de $p(x)$ mais de $q'(x)$

x est un facteur de $q(x)$ et de $q'(x)$ donc x^2 est facteur de $q(x)$ puis, en reprenant l'étape nommée (*), on démontre ainsi que x est un facteur de degré quelconque, ce qu'on ne peut admettre pour une fonction rationnelle

Une autre méthode consiste à utiliser les limites. Supposons $\ln(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, quotient de polynômes que l'on suppose irréductibles avec p de degré n (et de monôme de plus haut degré $a_n x^n$) et q de degré m (et de monôme de plus haut degré $b_m x^m$).

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, on a nécessairement $n > m$.

De $\ln(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, on obtiendrait alors que la limite de $\frac{\ln x}{x^{n-m}}$ serait égale à $\frac{a_n}{b_m}$ ce qui est impossible puisque l'on sait que pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Cette dernière contradiction prouve que l'hypothèse est fausse.

De même, on démontre que certains logarithmes ne sont pas rationnels, comme par exemple log 2 :

Utilisons de nouveau un raisonnement par l'absurde et supposons que l'on puisse écrire $\log 2 = \frac{p}{q}$.

On a alors $2 = 10^{\frac{p}{q}}$ puis $2^q = 10^p$.

Or 10^p est divisible par 10 ce qui n'est pas le cas pour une puissance de 2.

Cette dernière égalité est donc impossible.

6. Le logarithme en arithmétique.

En 1798, Legendre publia dans *Essai sur la théorie des Nombres*, la première conjecture significative sur le nombre d'entiers premiers inférieurs à n :

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n - 1{,}083\,66} \text{ pour } n \text{ assez grand}$$

Gauss étudia également les tables de nombres premiers et donna des estimations de $\pi(n)$ et ce, probablement dès 1791.

Certains nombres premiers sont de différence égale à 2 comme 11 et 13, 17 et 19 ; on les nomme les nombres premiers jumeaux.

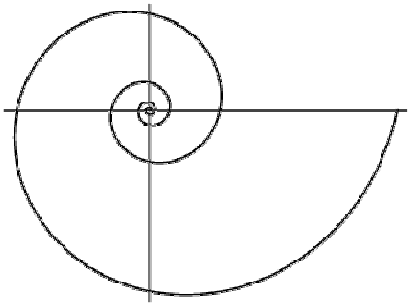
On ne sait toujours pas s'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.

Dans le cas où cela se vérifierait, une autre conjecture sur ces nombres premiers jumeaux reste à démontrer : leur densité parmi les nombres premiers est également $\frac{1}{\ln n}$.

Il proposa le résultat suivant : $\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,dt$, appelé logarithme intégral, c'est-à-dire que la densité des nombres premiers parmi les nombres entiers inférieurs à x est égale à $\frac{1}{\ln x}$.

7. La spirale logarithmique

Cette courbe, qui fut considérée pour la première fois par



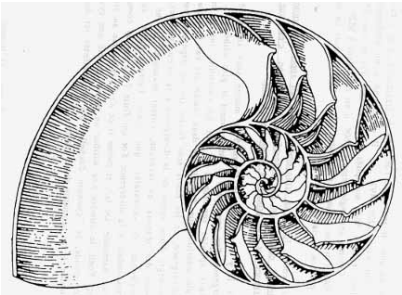
Descartes vers 1638, est d'équation polaire $r = ae^{m\theta}$ où, si M est le point de la courbe repéré par les coordonnées polaires (r,θ), $r = OM$ et $\theta = (\vec{i},\overrightarrow{OM})$

Les spirales logarithmique avaient enthousiasmé Jacob Bernoulli (1654-1705) au point de faire graver ladite spirale sur sa tombe accompagnée de la phrase latine *Eadem mutata resurgo*.

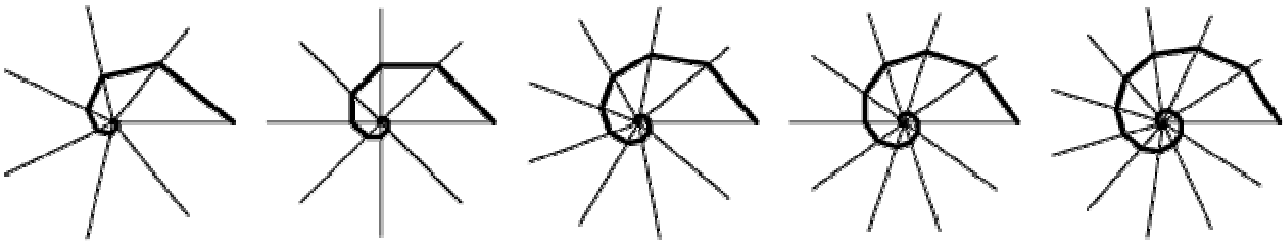
Cette spirale possède plusieurs propriétés caractéristiques :

• Elle est invariante par la composée d'une homothétie de centre le point O (pôle du repère polaire) suivie par une rotation convenable (similitude directe)

La coquille du nautile vérifie "naturellement" cette propriété.
Pendant une période de temps, il habite une chambre de sa coquille. Lorsqu'elle devient trop petite, il en fabrique une plus grande sur le modèle de la précédente autour de l'axe central.
Deux chambres consécutives forment ainsi entre elles un angle égal et sont proportionnelles, ce qui permet d'approcher la forme d'une spirale logarithmique



Une discrétisation identique est donnée par la méthode suivante.
Soit M un point distinct de O et considérons n demi-droites $[OM_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ telles que $M_1 = M$, OM_iM_{i+1} est rectangle en M_{i+1} et $(\overrightarrow{OM_i};\overrightarrow{OM_{i+1}}) = \dfrac{2\pi}{n}$. La courbe constituée des segments $[M_iM_{i+1}]$ s'approche d'une spirale logarithmique lorsque n tend vers $+\infty$.



• La spirale logarithmique est la courbe pour laquelle l'angle en un point entre la droite (OM) et la tangente en ce point est constant.
A partie de l'équation polaire $r = ae^{m\theta}$, nous pouvons retrouver une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = a.\cos\theta.e^{m\theta} \\ y(\theta) = a.\sin\theta.e^{m\theta} \end{cases}, \ \theta \in \mathbb{R}^+.$$

Si M est le point de paramètre θ, $\overrightarrow{OM}(x(\theta);y(\theta))$ et un vecteur directeur de la tangente en M à la courbe est $\vec{V}(\theta)(x'(\theta);y'(\theta))$. Le calcul de $\overrightarrow{OM}.\vec{V}(\theta)$ donne $\|\overrightarrow{OM}\|\times\|\vec{V}(\theta)\|\times\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$. D'où, si on note φ l'angle formé entre la droite (OM) et la tangente à la courbe en ce point, on trouve $\cos\varphi = \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$.
L'angle est alors constant.

On remarque dans ce cas, que si $m \to 0$, alors $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ (ou $r \to a$) et la spirale tend vers le cercle de centre O et de rayon a.

RECIPROQUEMENT PAR L'EQUATION DIFFERENTIELLE ?

Pour en savoir plus :

- Dictionnaire raisonné de mathématiques, André Warusfel, Editions du Seuil, 1961.
- Histoire des logarithmes de Neper à Euler, Charles Naux, 2 tomes, Librairie Scientifique et Technique, 1971.
- Musique et mathématique, Bernard Parzysz, Publication n°53 de l'APMEP, 1983
- Histoire d'algorithme, Du caillou à la puce, Jean-Luc Chabert, Belin, 1993
- Internet :

Sites généralistes :
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/
http://perso.wanadoo.fr/szmehl/
les nombres premiers
http://www.utm.edu/research/primes/howmany.shtml

Une piste plus difficile. On appelle loxodromies sur la sphère les courbes qui font un angle constant avec tous les méridiens). Les projections stéréographiques des loxodromies sont des spirales logarithmiques.
dixit Berger t5p81.

Une autre application serait de faire reconstruire le logarithme via l'exponentielle en remplissant les trous formés par les variations des suites géométriques. C'était le programme de sections A des années 70. Mais je n'ai pas retrouvé de référence.

Magnitude des étoiles
La relation de Pogson permet de mesurer les variations de luminosité entre 2 astres : $m_2 - m_1 = -2{,}5\log\frac{E_2}{E_1}$ où m_1 et m_2 sont les magnitudes apparentes des astres d'éclats E_1 et E_2)
Pour l'éclats des astres, on défini la magnitude absolue M d'une étoile comme la magnitude si elle était située à 10 parsecs (3,26 années-lumières) de la Terre. Ainsi la relation devient $m = M - 5 + 5\log d$ où d est la distance Terre-Etoile en parsecs et permet de déterminer des distances.

La dérivée logarithmique
Pour l'instant ce n'est pas assez étoffé pour être incorporé.
Lorsque l'on s'intéresse à l'évolution d'une quantité p entre les instants a et b, $\frac{p(b) - p(a)}{b - a}$ est l'accroissement moyen et $\frac{p(b) - p(a)}{p(a)(b - a)}$ est l'accroissement moyen relatif. Lorsque l'on fait tendre b vers a, si la limite de l'accroissement moyen existe (qui est alors égale au nombre dérivé de p en a), l'accroissement moyen relatif tend vers la croissance instantanée relative de p en a : $\frac{p'(a)}{p(a)}$.
Lorsque la fonction p est positive, on remarque qu'elle correspond à la dérivée de $\ln\circ p$ en a. C'est la dérivée logarithmique de p en a.

Repère semi-logarithmique
Peut être à joindre aux abaques ? ? ?
Considérons un repère dans lequel l'axe des abscisses possède une graduation régulière mais dont l'axe des ordonnées possède une graduation proportionnelle au logarithme des ordonnées que l'on souhaite représenter.
Si, par exemple, le logarithme utilisé est le logarithme décimal, la représentation graphique de la courbe d'équation $y = 10^x$, $x \geqslant 0$, dans ce repère sera l'ensemble des points de coordonnées $(x;x)$ donc une droite (ici la première bissectrice). Ce type de représentation permet de considérer les fonctions qui prennent à la fois de grandes valeurs et de petites valeurs, et de les représenter sur des graphiques de dimensions réduites.

---

pH-métrie
On définit l'acidité d'une solution en fonction de sa concentration en ions hydronium H_3O^+ (exprimée en moles par litre) et se mesure par son pH défini par pH = $-\log[H_3O^+]$.
Toute solution aqueuse contient des ions hydronium H_3O^+ et des ions hydroxyde OH^-. A 25°, la solution vérifie $[H_3O^+].[OH^-] = 10^{-14}$.
Sachant que l'eau pure contient des ions H_3O^+ et OH^- en concentrations égales, on a $[H_3O^+]^2 = 10^{-14}$.
On a alors, en utilisant le logarithme décimal $\log[H_3O^+]^2 = \log 10^{-14}$.
Le pH de l'eau pure est $-\log[H_3O^+] = -7$

On définit également le pH d'une solution, suite à la réaction acide base par $pH = pK_A + \log \frac{[base]}{[acide]}$

où $pK_A = -\log K_A$ et $K_A = \frac{[base][H_3O^+]}{[acide]}$ appelée constante d'équilibre.