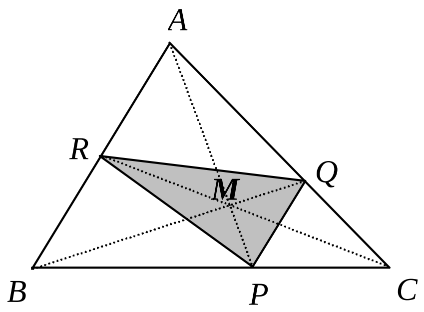
Soit $ABC$ un triangle, $M$ un point strictement intérieur au triangle et $P$, $Q$ et $R$ les points d'intersection de $(AM)$ avec $[BC]$, de $(BM)$ avec $[CA]$ et de $(CM)$ avec $[AB]$.

Le triangle $PQR$ est appelé triangle cévien de $M$ par rapport au triangle $ABC$, et son cercle circonscrit est appelé cercle cévien de $M$ par rapport au triangle $ABC$.

Le problème est le suivant :

*Existe-t-il une position de M dans le triangle pour laquelle l'aire du triangle PQR est maximale ?*




Les points $A$, $B$ et $C$ n'étant pas alignés, $M$ peut s'exprimer comme barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$.

En utilisant de trois façons différentes l'associativité du barycentre et les points $P$, $Q$ et $R$, on peut trouver:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\gamma}{\beta} \quad ; \quad \frac{CQ}{AQ} = \frac{\alpha}{\gamma} \quad ; \quad \frac{AR}{BR} = \frac{\beta}{\gamma}$$

D'où

$$\frac{BP}{CP} \times \frac{CQ}{AQ} \times \frac{AR}{BR} = 1 \text{ (Ménéalaüs)}$$

Une autre démonstration permettant d'obtenir cette relation de Ménéalaüs repose sur les aires des différents triangles de la figure, en notant $H$ le projeté orthogonal du point $M$ sur $[BC]$.

$\text{Aire}(MBP) = \frac{1}{2}MH \times PB$ et $\text{Aire}(MCP) = \frac{1}{2}MH \times PC$ donc $\frac{\text{Aire}(MBP)}{\text{Aire}(MCP)} = \frac{PB}{PC}$

De même, on trouve $\frac{\text{Aire}(PBA)}{\text{Aire}(PCA)} = \frac{PB}{PC}$ d'où, sachant que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a - c}{b - d} = \frac{c}{d}$, on trouve

$$\frac{\text{Aire}(PBA) - \text{Aire}(MBP)}{\text{Aire}(PCA) - \text{Aire}(MCP)} = \frac{PB}{PC} \text{ et donc } \frac{\text{Aire}(MBA)}{\text{Aire}(MCA)} = \frac{PB}{PC}$$

De même, on obtient : $\frac{\text{Aire}(MBC)}{\text{Aire}(MBA)} = \frac{QC}{QA}$ et $\frac{\text{Aire}(MBA)}{\text{Aire}(MBC)} = \frac{RA}{RC}$

puis, par produit : $\frac{BP}{CP} \times \frac{CQ}{AQ} \times \frac{AR}{BR} = 1$

Or $P$ est un point de $[BC]$ donc il existe un réel $x$ de $[0;1]$ tel que $BP = xBC$. De même il existe $y$ et $z$ tels que $CQ = yCA$ et $AR = zAB$. La relation de Ménéalaüs permet alors d'obtenir :

$$\frac{xBC}{(1 - x)BC} \times \frac{yCA}{(1 - y)CA} \times \frac{zAB}{(1 - z)AB} = 1$$

puis

$$\frac{x}{(1 - x)} \times \frac{y}{(1 - y)} \times \frac{z}{(1 - z)} = 1 \text{ soit } xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z) \quad (*)$$

Déterminons les aires des trois triangles $ARQ$, $BPR$ et $CQP$ :

$$\text{Aire}(AQR) = \frac{1}{2}\times AR\times AQ\times\sin(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}\times zAB\times(1 - y)CA\times\sin(\widehat{BAC}) = z(1 - y)\times\frac{AB\times CA\times\sin(\widehat{BAC})}{2}$$
$$= z(1 - y)\times\text{Aire}(ABC)$$

De même, on trouve :

$$\text{Aire}(BPR) = x(1 - z)\times \text{Aire}(ABC) \quad \text{et} \quad \text{Aire}(CPQ) = y(1 - x)\times \text{Aire}(ABC)$$

D'où

$$\text{Aire}(PQR) = \text{Aire}(ABC) - \text{Aire}(AQR) - \text{Aire}(BPR) - \text{Aire}(CPQ)$$
$$= \text{Aire}(ABC)\times[xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)] = 2\times\text{Aire}(ABC)\times xyz$$

L'aire du triangle $PQR$ est donc maximale lorsque $xyz$ l'est avec les conditions $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ et $xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$

**Peut-on envisager la symétrie du problème pour conclure immédiatement que cela est réalisé pour $x = y = z = \frac{1}{2}$ ?**

Etude dans le cas de deux variables :
Soit à trouver le maximum de $ab$, $a\in[0;1]$, $b\in[0;1]$ et $ab = (1 - a)(1 - b)$

## Considérations algébriques

On a $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$ pour tout $t > 0$ avec l'égalité pour $t = 1$ car $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{t^2 + 1 - 2t}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} \geqslant 0$

Si $xy = 1$,

$$\begin{aligned}(1 + x)(1 + y) &= 1 + x + y + xy \\ &= 1 + x + \frac{1}{x} + 1 \geqslant 2 + 2 = 4 \text{ avec égalité lorsque } x = 1 \text{ et } y = 1.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{1+x} \times \frac{1}{1+y} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Posons $a = \frac{1}{1+x}$ et $b = \frac{1}{1+y}$ .

Dans ce cas,

$$(1 - a)(1 - b) = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\left(1 - \frac{1}{1+y}\right) = \frac{x}{1+x}\,\frac{y}{1+y} = ab,\ \ a\in[0;1] \text{ et } b\in[0;1]$$

On a donc trouvé

$$ab \leqslant \frac{1}{4} \text{ avec égalité lorsque } x = y = 1 \text{ donc lorsque } a = b = \frac{1}{2}$$

## Retour vers une configuration connue

$$ab = (1 - a)(1 - b)$$

revient à

$$ab = 1 - a - b + ab$$

soit encore

$$a + b = 1$$

Le problème initial revient alors à recherche les rectangles d'aire maximale parmi les rectangles de périmètre 2. La solution est connue, il s'agit ici du carré de côté $\frac{1}{2}$. Ainsi $a = b = \frac{1}{2}$ :

## Version algébrique 1

On a $a + b = 1$ et notons $m = ab$.

$a$ et $b$ sont solutions de l'équation $X^2 - X + m = 0$ de solutions $X = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - m}$.

Pour que $X$ soit réel, il faut que $m \leqslant \frac{1}{4}$.

Le maximum est donc réalisé lorsque $m = \frac{1}{4}$ et dans ce cas, $X = \frac{1}{2}$.

On trouve ainsi $a = b = \frac{1}{2}$.

**Version algébrique 2**
On a $a + b = 1$ et on cherche encore le maximum de $ab$.
Pour tous réels $a$ et $b$, *a fortiori* dans [0;1],

$$(a - b)^2 \geqslant 0 \text{ soit } a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$$

D'où, en ajoutant $4ab$ dans les deux membres

$$a^2 + b^2 + 2ab \geqslant 4ab \text{ soit } (a + b)^2 \geqslant 4ab$$

On a donc

$$ab \leqslant \frac{(a + b)^2}{4} \text{ avec égalité lorsque } (a - b)^2 = 0 \text{ } ie \text{ } a = b$$

Or $a + b = 1$

donc, pour tous reels $a$ et $b$ de [0;1], $ab \leqslant \frac{1}{4}$ avec égalité, et donc maximum ici, lorsque $a = b$. Dans ce cas, le maximum a lieu lorsque $a = b$ et $ab = \frac{1}{4}$ d'où $a = b = \frac{1}{2}$

**Version fonctionnelle**
Puisque $xy = x(1 - x)$, l'étude de la fonction $x \to x(1 - x)$ sur [0;1] montre l'existence d'un maximum pour $x = \frac{1}{2}$ (ou en remarquant que cette fonction est celle d'un polynôme du second degré dont la courbe est une parabole ayant un axe de symétrie, la concavité associée donne l'existence du maximum).

**Version probabiliste**
Aux réels $a$ et $b$ de [0;1], on peut associer deux événements $A$ et $B$ dans un espace probabilisé de probabilité $P$ tels que

$$a = P(A) \text{ et } b = P(B)$$

$$ab = (1 - a)(1 - b)$$

peut d'interpréter en

$$P(A)\, P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B))$$

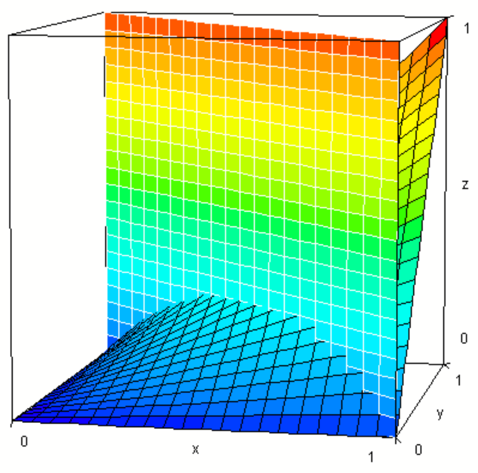
soit

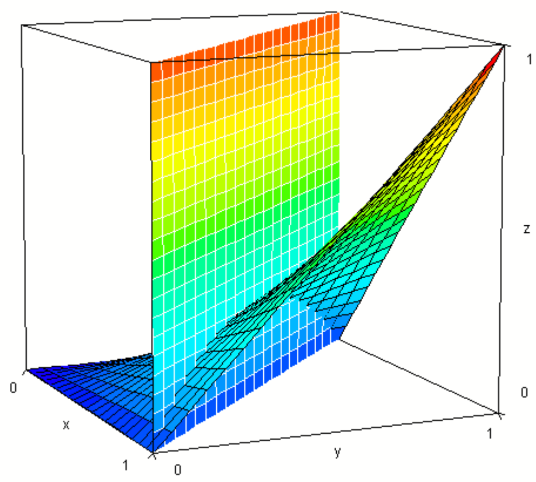
$$P(A) + P(B) = 1 \quad \text{et} \quad B = \overline{A}$$

On recherche donc le maximum de $P(A)\ P(\overline{A})$ soit de $x(1 - x)$ pour $x$ dans [0;1], ce qui a lieu par la continuité de la fonction et sa symétrie en son milieu ou en les extrémités. Les valeurs étant nulles aux extrémités, ce maximum a lieu en $x = \frac{1}{2}$.

## Un détour par la géométrie dans l'espace

On peut également visualiser la courbe intersection des deux surfaces $z = ab$ avec celle d'équation $a + b = 1$ et remarquer la présence du maximum.



Retour au problème avec trois variables :

**Version algébrique**

On a $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$ pour tout $t > 0$ avec l'égalité pour $t = 1$ car $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{t^2 + 1 - 2t}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} \geqslant 0$

SI $a$, $b$ et $c$ sont trois réels de [0;1] tels que $abc = 1$, ils ne peuvent s'annuler (sinon le produit ne peut être non nul). $c = \frac{1}{ab}$.

$$\begin{aligned}(1 + a)(1 + b)(1 + c) &= 1 + ab + ac + bc + abc + b + a + c \\ &= 2 + ab + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + b + a + \frac{1}{ab} \\ &\geqslant 2 + 2 + 2 + 2 \text{ en utilisant le premier résultat,} \\ &= 8\end{aligned}$$

Posons, $a = \frac{1}{1-x} - 1$ soit encore $x = 1 - \frac{1}{1+a}$. Comme $a \in ]0;1]$, alors $x \in ]0;1[$.

De même pour $y$ et $z$.

$$xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \times \frac{y}{1-y} \times \frac{z}{1-z} = 1 \quad \text{or } a = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1 - 1 + x}{1-x} = \frac{x}{1-x},$$

de même pour $b$ et $c$.

$$\Leftrightarrow abc = 1$$

Or $xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z) = \frac{1}{1+a} \times \frac{1}{1+b} \times \frac{1}{1+c} \leqslant \frac{1}{8}$

avec égalité si $a = b = c = 1$

c'est-à-dire pour $x = y = z = \frac{1}{2}$.

**Version géométrique**

Par composition d'affinités, on peut ramener la situation initiale à celle d'un triangle équilatéral $ABC$.
Caractérisation du centre de gravité ?
Par affinité, on peut ramener la situation à un triangle $ABC$ équilatéral où la recherche de l'aire maximale serait équivalente.
Mais la situation géométrique reste à démontrer et pourquoi pas caractériser le centre de gravité ??

**Utilisation de la situation de deux variables :**

On a

$$xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z) \text{ pour } x, y \text{ et } z \text{ entre 0 et 1.}$$

Le produit $xyz$ est maximal lorsque $xy$ et $z$ le sont.

Peut-on l'affirmer puisqu'il y a une relation entre $x$, $y$ et $z$ ?

Comme $z \neq 0$ (sinon le produit est nul et on peut trouver une valeur du produit supérieure), on peut écrire

$$xy = k(1 - x)(1 - y) \text{ avec } k = \frac{1-z}{z}$$

d'où, successivement :

$$xy = k - kx - ky + kxy$$
$$(1 - k)xy + kx + ky = k$$

Si $k \neq 1$,

$xy = \frac{k - kx - ky}{1 - k} = \frac{k(1 - x - y)}{1 - k}$ et le produit $xy$ est maximal pour $x + y = 0$ et comme ces valeurs sont positives, lorsque $x = y = 0$ donc le produit est nul.

Si $k = 1$,

$(1 - k)xy + kx + ky = k$ devient $x + y = 1$. Ce cas a été vu et le produit $xy$ est maximal lorsque $x = y = \frac{1}{2}$; $k = 1$ donnant alors $\frac{1 - z}{z}$ d'où $z = \frac{1}{2}$.