

Représentations et Constructions d'arcs et de voûtes en Architecture

Frédéric Vivien
Lycée Pierre Corneille de Rouen
I.R.E.M. de Rouen

L'objet de cet atelier est de montrer quelques aspects mathématiques dans des objets que nous rencontrons partout, à savoir les voûtes en architecture. La plupart des notions présentées ici sont du niveau de collège et peuvent être rendues plus dynamiques avec des logiciels de géométrie dans le plan et dans l'espace.

La première partie de cet exposé est une présentation de quelques unes des premières traces de constructions clavées (et non pas maçonnées, c'est-à-dire utilisant un mortier pour soutenir l'ensemble) de notre patrimoine, à savoir les monuments construits aux périodes romanes et gothiques.

La deuxième partie est une interprétation des premiers écrits de Villard de Honnecourt, architecte du XIII^{ème} siècle nous livrant bien des secrets sur les méthodes de constructions.

Après des exemples supplémentaires illustrés de sites de notre région, nous rappellerons ce qu'était la géométrie descriptive et son application sur la représentation de voûtes.

Nous terminerons par des exemples classiques d'arches et de modèles de stéréotomie.

La stéréotomie est l'art de tracer les formes à donner aux pierres en vue de leur assemblage. Les éléments constitutifs des arcs et des voûtes, taillés en forme de coin s'appellent les "claveaux" ou les "voussoirs". Ils possèdent un plan cintré (la douelle) qui reste visible et fait partie de la face inférieure curviligne de la voûte (intrados) et des "lits en coupe", pans obliques par lesquels un claveau s'appuie sur le claveau voisin...(*Vocabulaire de l'Architecture*, Ministère des Affaires Culturelles, Imprimerie Nationale, Paris, 1972).

I. Les périodes Romanes et Gothiques

1) Les voûtes romanes

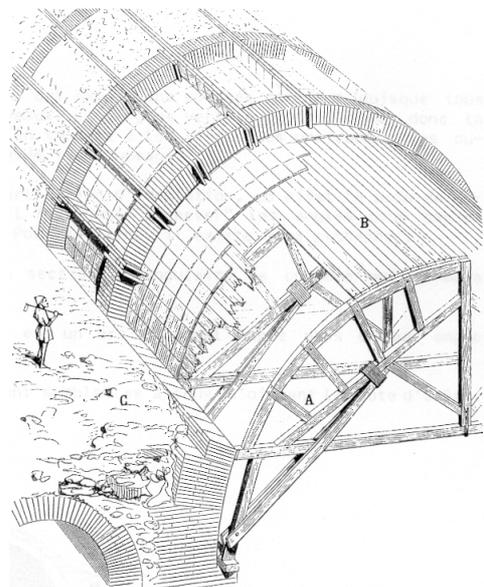
Elles sont semblables à ce que connaissaient les romains dont la voûte en berceau plein cintre, c'est-à-dire de forme cylindrique.

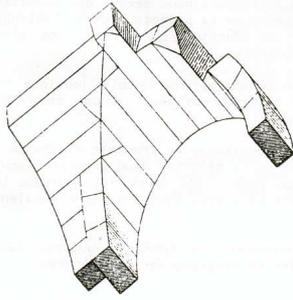
L'image ci-contre montre la méthode de construction d'une voûte sur les cintres en bois.

Le problème des voûtes en berceau est que la poussée latérale est très importante. Il faut alors beaucoup la contre-butée.

La voûte brisée, de par sa forme, offrira une solution améliorée à ce problème. Elle était déjà connue à l'époque romane.

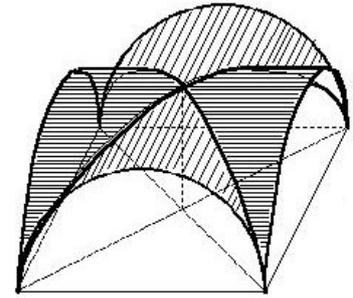
Dans les constructions religieuses, plus les murs étaient hauts, plus ils étaient épais et donc plus il était difficile de les percer.





L'apparition des voûtes d'arêtes permit de rassembler les poussées sur les retombées, c'est-à-dire aux intersections de deux voûtes en berceau. Cela autorise les ouvertures entre ces points.

Ouvrir les murs, apporter de la lumière, ce fut le début de la période gothique.

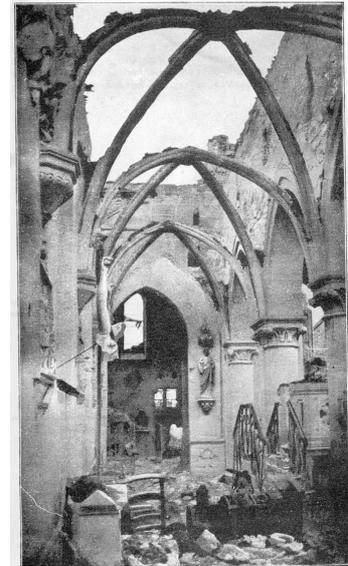


2) Les voûtes gothiques

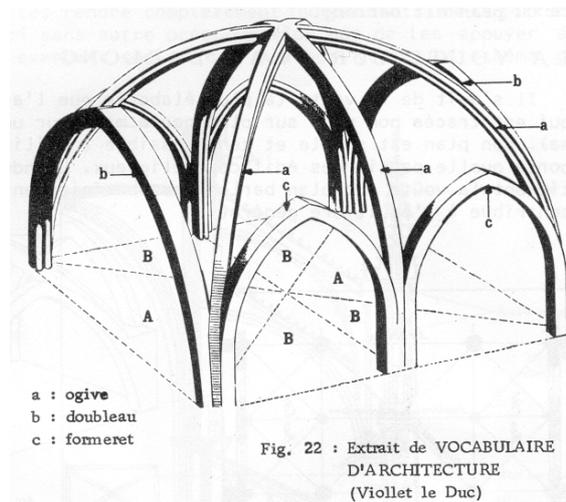
Un élément caractéristique de la période gothique est la voûte d'ogive. Elle est construite à partir d'arcs diagonaux, les ogives. Sur ce squelette reposent les voûtains que l'on s'efforce de rendre les moins lourds possible. L'ensemble n'est pas maçonné, mais au contraire indépendant.

On remarque ci-contre la résistance des ogives suite à un effondrement de la voûte.

Le problème est au point de rencontre des branches d'ogives ; elles risquent de s'écraser ou de glisser l'une contre l'autre et ce d'autant plus que l'angle est aigu.



La solution la plus sûre consiste à utiliser des voûtes sur plan carré dont la voûte sexpartite en est un exemple :



Une autre solution consiste à maintenir les ogives en leur point d'intersection. La clef de voûte qui sera de plus le seul lien entre les ogives et les voûtains.

Dans la construction, on pose d'abord la clef de voûte sur les cintres et seulement après les ogives qui seront aux mêmes niveaux.

Il faut, de plus, que cette clef soit pesante pour empêcher le relèvement des nervures.

l'image ci-contre est tirée de [1] et montre une partie du plafond de l'église de Tillière-sur-Avre.

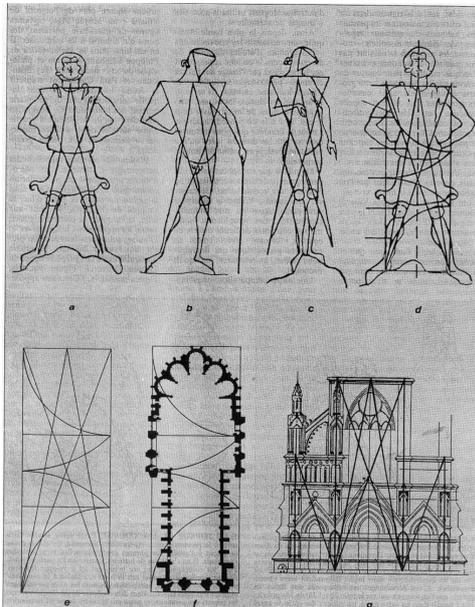


II. La géométrie du trait de Villard de Honnecourt

1) L'album de Villard de Honnecourt

Ce carnet¹ constitue un mémento de méthodes, de procédés, de dispositifs, dans divers domaines tels que la géométrie appliquée, l'arpentage, l'ingénierie, la mécanique, ...

Il existait une géométrie de chantier, ce carnet en témoigne. Ces connaissances durent s'acquérir soit par transmission orale, soit par les manuscrits de Vitruve recopiés à travers tout le Moyen Age.



Ce schéma de l'homme debout est reproduit à trois reprises sur le manuscrit. L'image ci-contre est tirée de [6].

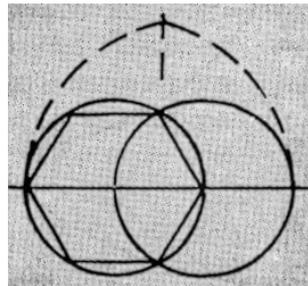
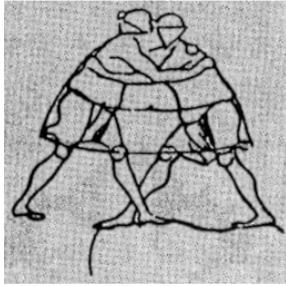
Le schéma propose une proportion dans laquelle on peut en déduire deux propriétés :

- Le segment qui joint un sommet du rectangle, schématisé par l'homme debout, au milieu du petit côté opposé coupe la diagonale au tiers de sa longueur.
- Le rectangle a pour longueur du plus grand côté $2\sqrt{2}$ fois celle du petit. Ainsi ce dernier est de longueur le tiers de la diagonale.

En examinant une série de cathédrales (Bourges, Troyes, Tours, Reims,...) on s'aperçoit qu'elles sont strictement implantées à l'intérieur d'un rectangle de cette proportion. Dans le cas de Reims, cette même combinaison géométrique régit aussi les différentes

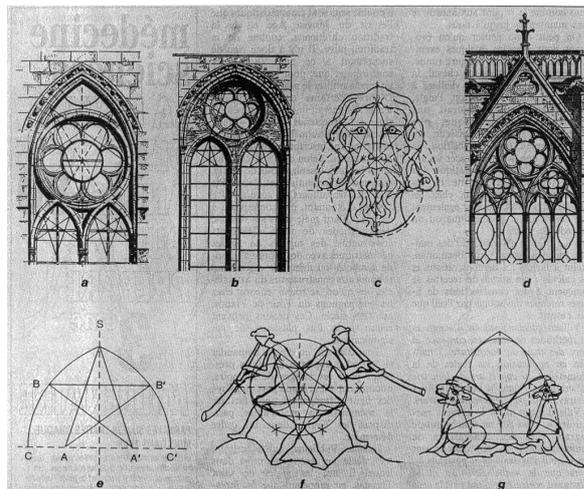
parties de la façade. Cette dernière est composée de deux rectangles de proportion $\frac{1}{\sqrt{2}}$

¹ Ce carnet est disponible sur internet par une recherche ou plus directement sur www.backmedia.com/cosmos. L'original se trouve à la Bibliothèque Nationale. Il a été édité chez Stock en 1986 et commenté par des historiens.



Dans cet extrait d'une planche, deux compagnons se donnent l'accolade après s'être dit les phrases conventionnelles.

La réunion des deux personnages constitue deux demi-arcs et symbolise "l'union fait la force" tout comme la voûte qui tient grâce aux arcs équilatères ainsi représentés..



Les pentagones étoilés, pointe en haut ou pointe en bas, peuvent être utilisés pour mémoriser les positions des centres des arcs composant divers types de fenestrages.

La figure (e) est un premier type de tracé.

Le schéma des "sonneurs de trompe" (f) s'applique à un fenestrage de la nef de Reims (a) que Villard de Honnecourt affectionnait pour sa proportion.

Le schéma de "l'homme barbu" (c) correspond à un fenestrage de Soissons (b).

Celui des deux lions (g) correspond à un fenestrage de la Sainte-Chapelle haute de Paris (d).

Pendant des siècles, le corporatisme des tailleurs de pierre a permis de préserver les secrets de fabrication des voussoirs². Ainsi, la théorie géométrique sous-jacente des dessins des bâtisseurs est restée informulée très longtemps.

Les autres traités de taille de pierre

Le premier traité de taille des pierres est publié par Philibert de l'Orme en 1567 dans son "Architecture". Il fut suivi d'un opuscule de Desargues qui étudie un unique objet architectural en 8 pages en 1643.

Vinrent ensuite des traités de praticiens (Jousse en 1642, Derant et Bosse en 1643, Jean-Baptiste De la Rue en 1728) et d'autres de théoriciens (Philippe de La Hire en 1695, Amédée-François Frezier en 1738)

2) Des exemples de construction chez Villard de Honnecourt

Le constructeur gothique compte sur la qualité et la forme de la pierre et de ses joints pour que leur ajustement précis assure la stabilité de l'édifice. Cela sous entend la maîtrise de la géométrie du trait (appelé encore aujourd'hui ainsi par les compagnons) soit encore de la stéréotomie.

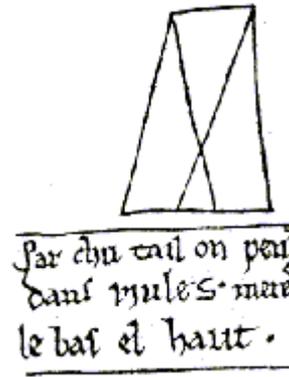
L'un des premiers exemples de l'utilisation de la géométrie du trait chez les compagnons est donné par les carnet de Villard de Honnecourt dans ses carnets : **la voûte plate**.

² Les statuts de la corporation des tailleurs de pierres, publiés à Ratisbonne en 1459, précisait encore "nul ouvrier, nul maître, nul parlier, nul journalier, n'enseignera à quiconque n'est pas de notre métier et n'a jamais fait de maçon comment tirer l'élévation du plan".

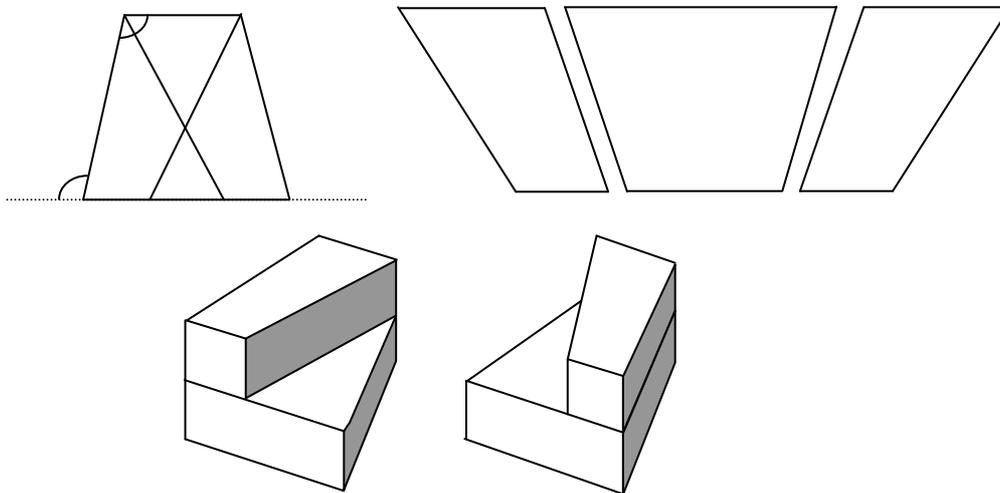
La méthode de construction proposée par Villard de Honnecourt pour trois claveaux peut se généraliser à plus.

On peut y lire (cf [3]) :
par chu tail on pendant rivlés mete le bas en haut

ce qui signifie
Ainsi taille-t-on des pendants réglés, mettez le bas en haut

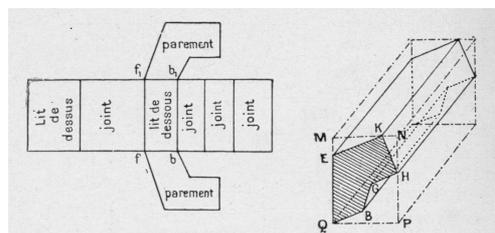
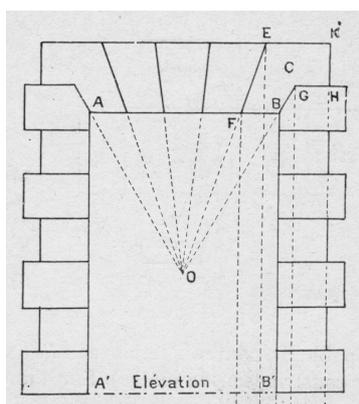


Sur un trapèze isocèle, on construit deux autres trapèzes comme sur la figure ci-dessous. Après une rotation et en utilisant les angles alternes-internes, les nouveaux trapèzes peuvent s'accoler au premier et continuer la construction de la voûte plate.



Dans la pratique, les plans des joints des voussoirs se coupent en une même droite :

On subdivise, comme sur le schéma ci-dessous, le segment $[AB]$ en un nombre impair (permettant la construction de la clef de voûte) de segments de longueurs égales. A partir de $[AB]$, on construit le triangle équilatéral ABO . On détermine alors les directions des joints de claveaux par les droites passant par le point O et les extrémités de la subdivisions de $[AB]$. Pour la taille d'un voussoir (ci-joint le voussoir représenté par C). On commence par en représenter le développement plan. Puis on peut utiliser une taille par panneau.



La poussée exercée par une voûte est d'autant plus forte que la voûte est moins élancée en hauteur. La taille des voussoirs³ d'une voûte plate doit être précise afin qu'ils ne risquent pas de glisser.

La voûte biaise

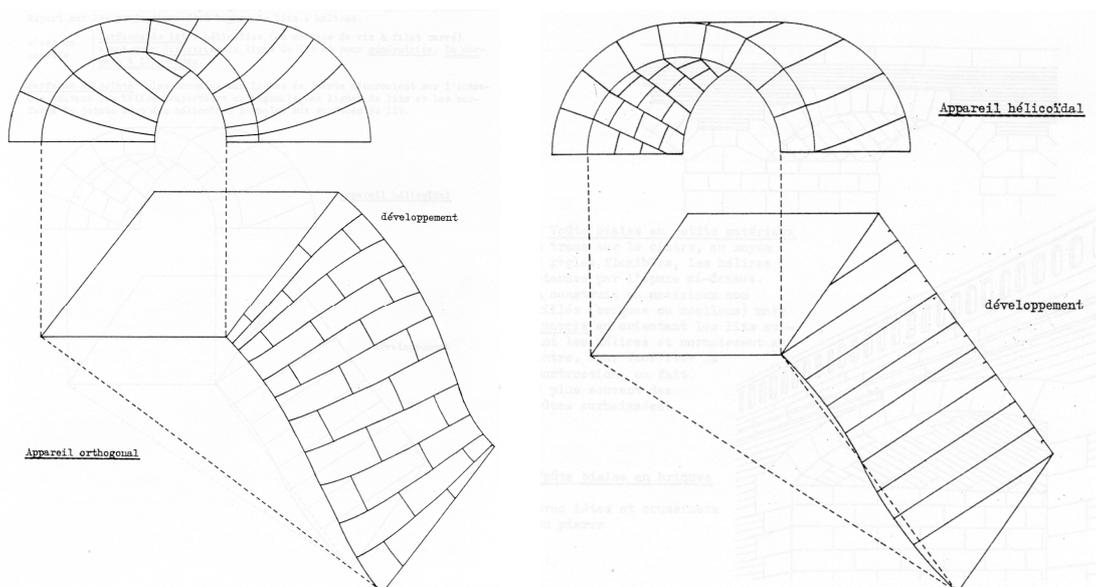
On appareillait les voûtes biaises (c'est-à-dire dont l'axe de la voûte n'est pas perpendiculaire au plan défini par l'arc de tête) selon 2 systèmes principaux :

L'appareil orthogonal parallèle correspondant au principe des arceaux décrit par Villard. Chaque arceau est parallèle au mur extérieur et décalé par rapport au précédent de façon "continue". On démontre que les arcs successifs se développent suivant des sinusoides.

On voit alors que tous les voussoirs sont différents et de surfaces courbes ce qui les rend très difficiles à tailler.

Dans la pratique, on remplace ces sinusoides par des cordes (développement des arcs de tête) qui s'enroulent suivant des hélices sur le cylindre.

On divise les cordes par un même nombre de parties égales et on trace les trajectoires orthogonales qui sont des droites perpendiculaires aux cordes. Le tracé d'un voussoir est très complexe mais ils sont tous semblables (exceptés ceux de tête).



Avec le développement des voies de chemin de fer, l'appareil hélicoïdal devint le système prédominant.

³ Méthodes de coupe des pierres pour les voussoirs d'une voûte :

- La méthode par ravalement est la plus ancienne : elle consiste à tailler les pierres lorsqu'elles sont en place dans la voûte ou dans l'arc. On se contente ensuite de les dégauchir approximativement au sol.
- Méthode par équarrissement : (on retrouve cette technique dans certains monuments clavés syriens datant du V^e et VI^e siècles). On inscrit le voussoir dans un parallélépipède rectangle, puis chaque point est repéré par sa projection sur deux faces orthogonales du parallélépipède. Dans la pratique, on trace les projections sur les deux faces parallèles puis on taille par moitié.
- Méthode par panneau : la vraie grandeur de chacune des faces doit être prédéterminée. On prend un parallélépipède rectangle de volume minimal. La taille est alors effectuée au moyen d'un patron de chaque face, en bois ou en métal.

En général, les voussoirs des arcs de tête sont en pierre de taille, le reste de la voûte est en briques.



On a le cas ci-contre d'une voûte biaise en anse de panier. Les joints de lits sont des segments d'ellipses (intersection entre le cylindre de la voûte et les plans de joints, inclinés par rapport à l'horizontale).

De même, si l'arc de tête est en plein cintre, la section droite est une ellipse alors que si la section droite est en arc de cercle alors l'arc de tête est une ellipse.

III. Quelques exemples de voûtes dans notre région

Les voûtes surbaissées ont pour section droite (pour l'intrados) un arc surbaissé (sa hauteur est inférieure à la moitié de l'ouverture). Cette section peut être une demi-ellipse, une anse de panier ou un arc de cercle.



Gare S.N.C.F. de Rouen (1923)
Photo tirée de [3]

La voûte à la française est caractérisée par les voûtes surbaissée et par un effort pour diminuer le rapport de la flèche, ou montée, par rapport à la portée, ou ouverture (comme, par exemple, le pont de Saint-Dié avec un surbaissement de $\frac{1}{18}$).

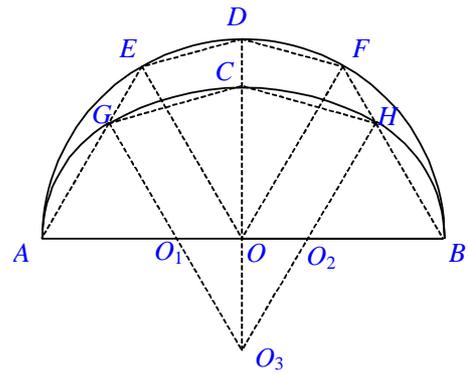
C'est sans doute au pont de Toulouse (voûté à partir de 1614) que pour la première fois dans l'architecture française, l'anse-de-panier remplace le plein-cintre traditionnel.

Les voûtes en anse de panier sont assez simple à réaliser. Lors d'une taille par panneau, il ne faut que deux patrons pour l'anse à trois centres (un pour les deux petits arcs de cercle et un autre pour le grand) ; la taille des voussoirs est ainsi simplifiée. Pour l'anse à 5 centres, il ne faut que trois patrons. Alors que si l'on prend une ellipse, les normales se couperont en des points différents, chaque voussoir de la moitié d'une voûte devra être taillé avec un tracé particulier.

Anse à trois arcs de cercle :

Soit $[AB]$ l'ouverture et $[OC]$ la montée (ou flèche), D est l'intersection entre le cercle de diamètre $[AB]$ et la médiatrice de $[AB]$.

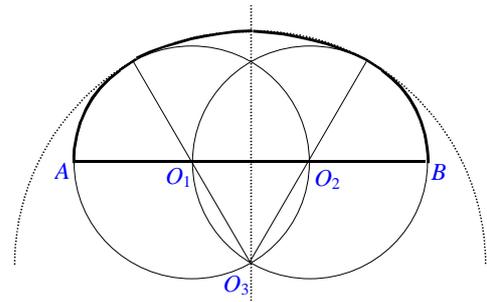
On note E et F les points divisant l'arc de cercle en trois. H est le point d'intersection de la parallèle à (DF) passant par C et de la droite (FB) . De même, G est le point d'intersection entre la parallèle à la droite (DE) passant par C et (EA) . On construit les trois arcs avec les centres O_1, O_2 et O_3 .



Anse à trois centres :

O_1 et O_2 sont tels que $AO_1 = \frac{1}{3}AB$ et $AO_2 = \frac{2}{3}AB$.

On construit alors l'arc en ovale à partir des points O_1 et O_2 et O_3 comme sur la figure ci-contre.

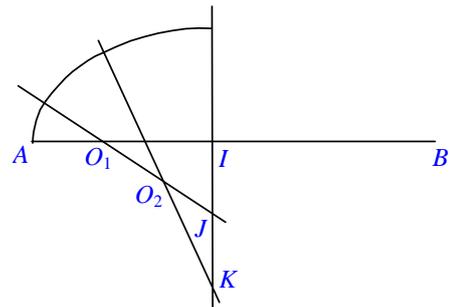


Anse à cinq centres :

O_1 est le point défini par $AO_1 = \frac{1}{5}AB$ et I est le milieu de $[AB]$. J et C sont les points de la médiatrice de $[AB]$ tels que $IJ = JK = AO_1$

Le point O_2 est le point de (O_1J) défini par $O_1O_2 = AO_1$ comme sur la figure ci-contre.

On construit alors les différents arcs de centres O_1, O_2 et K . Il reste à terminer l'anse de panier par la symétrie par rapport à la médiatrice de $[AB]$.



De même, on peut construire un arc avec cinq cercles et plus (en nombres impairs pour la constitution de la clef de voûte).

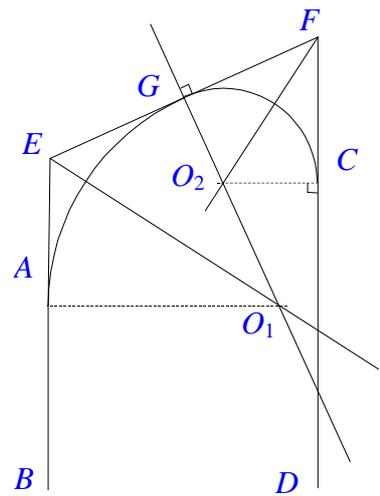
Nous pouvons tenter d'illustrer cette construction en examinant une photographie de la gare S.N.C.F. de Rouen.

Bien entendu, avec la précision de la photographie et la différence entre les rayons des cercles utilisés, on peut trouver des arcs à 3 centres ou plus.

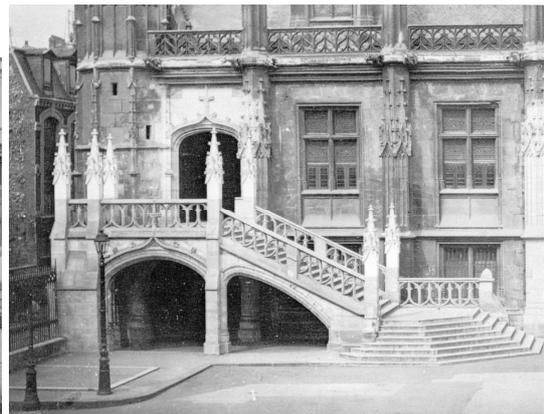
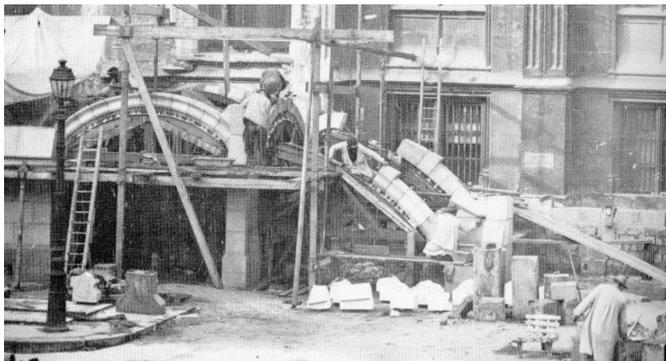
L'arc rampant

L'arc rampant est une arcade composée de deux arcs de cercle se raccordant entre eux et se raccordant à deux segments parallèles d'inégale longueur. Ces segments sont appelés pieds-droits (cette construction est destinée à soutenir une rampe).

Soient $[AB]$ et $[CD]$ les pieds-droits de l'ouverture où est située l'arcade, les points A et C sont à déterminer, la droite (EF) étant parallèle à la rampe. Sur le segment $[EF]$ on fixe un point G , point de contact de $[EF]$ avec l'arc rampant (en général le milieu de $[EF]$). La perpendiculaire à la droite (EF) passant par le point G coupe la bissectrice de l'angle \widehat{GEB} au point O_1 et la bissectrice de l'angle \widehat{GFD} au point O_2 . Les points A et C sont les projections orthogonales des points O_1 et O_2 respectivement sur les droites (EB) et (FD) . On termine la construction en traçant les arcs de cercle \widehat{AG} et \widehat{GC}



Ci-dessous le remplacement d'un escalier du Palais de Justice de Rouen (cf [3])



IV. La géométrie descriptive

Dès son entrée à l'Ecole de génie de Mezières en 1764 à l'âge de 18 ans, Monge (1746-1818) travailla dans l'atelier de dessin, de coupe des pierres et de moulage de l'Ecole. Il parvenait ainsi à résoudre par des constructions géométriques simples des problèmes de dessin de fortifications. A partir de 1770, les méthodes de la géométrie descriptive y furent enseignées. Après avoir créé l'école normale de l'an III, il assura les cours de géométrie descriptive (dont il fit la discipline reine en donnant la moitié du temps des études des élèves de la première promotion).

Dans sa présentation de ses leçons en 1795, Monge définit ainsi la géométrie descriptive : (Cf [4])

"Cet art a deux objets principaux : Le premier est de représenter avec exactitude, sur des dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et qui sont susceptibles de définition rigoureuse ... Le second ... est de déduire de la description exacte des corps tout ce

qui suit nécessairement de leurs formes et de leurs positions respectives. Dans ce sens, c'est un moyen de rechercher la vérité".

Cette discipline permet donc de rassembler la représentation et la découverte des formes.

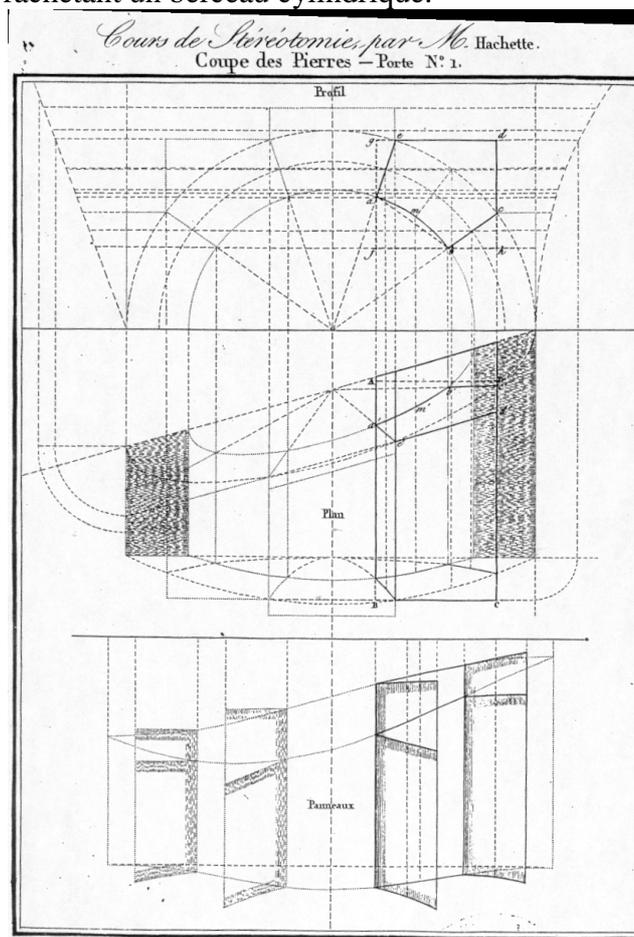
Représentation d'un objet :

A tout point de cet objet dans l'espace, on associe ses deux projections orthogonales sur deux plans orthogonaux de cet espace que l'on rabat ensuite l'un sur l'autre (le plus souvent un plan vertical ou plan frontal et le plan de rabattement horizontal). Tout point de l'espace est donc représenté par un couple de points du plan, son "épure". Monge adjoint une seconde convention pour la représentation des surfaces : "pour exprimer la forme et la position d'une surface courbe, il suffit, pour un point quelconque de cette surface, et dont une de ses projections peut être prise à volonté, de donner la manière de construire les projections horizontale et verticale de deux génératrices différentes qui passent par ce point"

La méthode de taille par équarrissement (cf note n°3 du présent article) permet de "découvrir" l'objet après sa taille. Par contre, la méthode par panneaux suppose, avant toute taille, de connaître la forme de chacune des faces de l'objet. Cette méthode, plus économique en pierre (qui peut atteindre le tiers) nécessite de connaître sa représentation, ce qui coïncide avec les techniques de la géométrie descriptive (choix d'un plan, rabattements, projections, ...).

Voici un exemple d'épure donnée par le successeur de Monge à l'école polytechnique, M. Hachette.

Il s'agit d'une porte biaise (axe de la voûte est quelconque par rapport au mur), en talus (le mur est non vertical), rachetant un berceau cylindrique.



L'exposé continua sur la présentation de quelques exemples classiques que l'on trouvera dans [1] et [5] concernant des chefs d'œuvre de l'architecture :

- La voûte de l'hôtel de ville d'Arles
- La trompe du Château Anet (Eure-et-Loir)
- Les coupes du Pantheon

Bibliographie :

- [1] Architecture à la française, Jean-Marie Pérouse de Montclos, Picard, Paris, 1982.
- [2] La géométrie descriptive, une reine déçue, Joël Sakarovitch, in La formation polytechnicienne 1794-1994, sous la direction de B. Belhoste, A6D. Dalmedico, A Picon, DUNOD
- [3] Histoire de Rouen 1900-1939 en 800 photographies, Guy Pessiot, Editions du P'tit Normand, Rouen
- [4] Géométrie Descriptive, Gaspard Monge, Editions Jacques Gabay, 1986
- [5] Stéréotomie, étude des arcs, voûtes, escaliers, J-L Gauthier, Ecole Supérieure des Beaux-Arts
- [6] La mnémotechnique des constructeurs gothiques, Roland Bechmann, Pour la Science, N°158, décembre 1990.
- [7] Le traité de coupe de pierres de Girard Desargues, Didier Bessot, Yves Hellegovarc'h, Jean-Pierre Le Goff (Dir), in Destin de l'Art ; desseins de la science, Actes du colloque ADERHEM de Caen d'octobre 1986, Caen, 1991.
- [8] La coupe des pierres et la Géométrie descriptive et La géométrie descriptive après Monge, Joël Sakarovitch, annexes 15 et 21 in L'Ecole Normale de l'an III, leçons de mathématiques, Laplace, Lagrange, Monge, Jean Dhombres (Dir), Paris, Dunod, 1992.
- [9] La taille des pierres et la géométrie descriptive, Joël Sakarovitch, in La figure et l'espace, Actes du colloque Inter-IREM de Lyon, Lyon, 1993.