

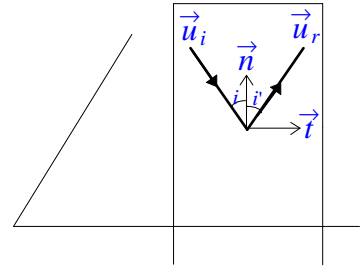
La réflexion en optique

1) Lois de la réflexion

- Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence (qui est le plan contenant le rayon incident et la normale au dioptre).

\vec{u}_i : rayon incident (vecteur unitaire)

\vec{u}_r : rayon réfléchi (vecteur unitaire)



- Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale à l'interface. L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence :

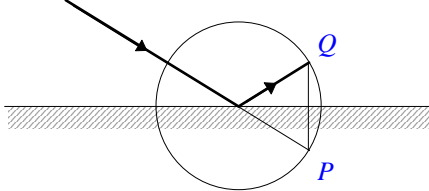
$$i' = i.$$

Conséquence : $\vec{u}_r - \vec{u}_i$ est porté par la normale \vec{n} d'où $\vec{u}_r - \vec{u}_i = \lambda \vec{n}$. Les composantes sur \vec{t} sont égales, celles sur \vec{n} sont opposées.

2) Construction géométrique du rayon réfléchi

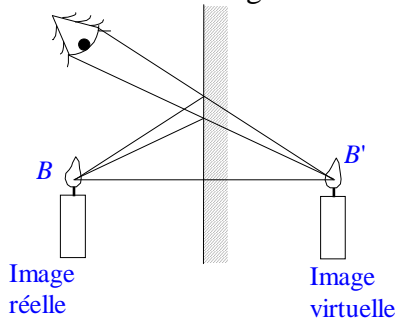
Le miroir plan

Construction de Descartes



Q est à l'intersection du cercle et de la normale au plan passant par P

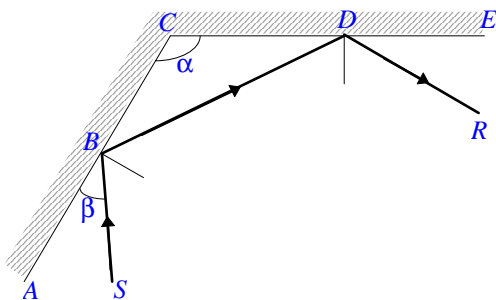
définition d'images réelle et virtuelle



Par la réflexion d'axe le miroir plan, le point réel B est envoyé en le point virtuel B' . Si on note O le projeté orthogonal de B sur le miroir, on obtient $\overline{OB} + \overline{OB'} = 0$ (relation de conjugaison en B et B').

2 miroirs plans formant un angle de α

Des rayons lumineux sont réfléchis par deux miroirs formant un angle α entre eux. Si on note β l'angle formé par le rayon lumineux et le premier miroir, déterminons l'angle de déviation, c'est-à-dire l'angle formé par le rayon incident et le rayon réfléchi suite à ce système optique.



$$\begin{aligned} (\vec{SB}, \vec{BQ}) &= (\vec{SB}, \vec{CB}) + (\vec{CB}, \vec{CD}) + (\vec{CD}, \vec{DQ}) \\ &= \pi - \beta + \alpha + \pi + \alpha + \beta \\ &= 2\alpha \end{aligned}$$

L'angle de déviation est ainsi constant, double de l'angle formé entre les deux miroirs.

Dans le cas particulier de deux miroirs perpendiculaires, le rayon réfléchi est parallèle au rayon incident.

3 miroirs plans formant un catadioptre

Il est formé de trois miroirs plans perpendiculaires deux à deux. Déterminons l'angle de déviation d'un rayon lumineux réfléchi par les trois faces du système catadioptrique.

Le rayon lumineux arrive, par exemple, sur la plaque parallèle au plan (yOz) . Les composantes du vecteur directeur parallèle sont conservées et celle suivant (Ox) est rendue opposée : $(a,b,c) \rightarrow (-a,b,c)$

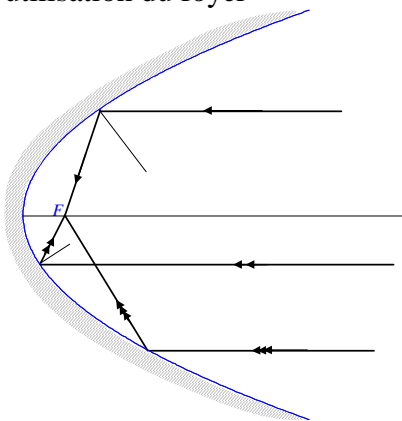
Lorsque le rayon est réfléchi par les trois faces, son vecteur directeur passera donc des composantes (a,b,c) à $(-a,-b,-c)$. Il repart en sens inverse de sa direction initiale.

En mesurant le temps nécessaire à un aller-retour de la lumière entre la Terre et un tel réflecteur installé sur son satellite, on mesure la distance Terre-Lune.

Un réflecteur métallique de ce type est placé sur certains bateaux et sert à obtenir un spot lumineux sur écran radar (il ne s'agit plus d'ondes lumineuses mais les résultats sont encore applicables).

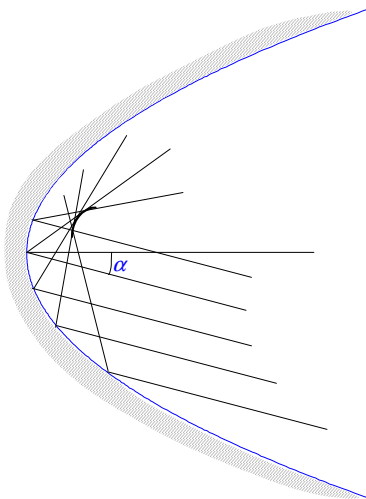
Le miroir parabolique

utilisation du foyer



Tous les rayons parallèles à l'axe optique (axe de la parabole) passent par le foyer F de cette parabole après réflexion sur le miroir parabolique.

Le foyer F est donc le conjugué du point à l'infini et par le principe du trajet inverse de la lumière, le point à l'infini est le conjugué du foyer F .



Lorsque les rayons ne sont plus parallèles à l'axe optique et si cet angle α est grand, les rayons ne se croisent plus en un point unique de l'espace. Il n'y a plus *stigmatisme*. Les rayons sont très denses (ont pour enveloppe) au voisinage d'une courbe appelée *caustique*.

En revanche, si les rayons incidents sont peu inclinés par rapport à l'axe, les rayons réfléchis sont moins dispersés au voisinage d'un point. On peut alors parler de *stigmatisme approché*.

Exemples de caustiques d'un miroir parabolique convexe.

a) Déterminons l'enveloppe de la famille des rayons réfléchis lorsque les rayons incidents sont parallèles à la directrice.

Considérons la parabole (P) d'équation $y^2 = 2px$.

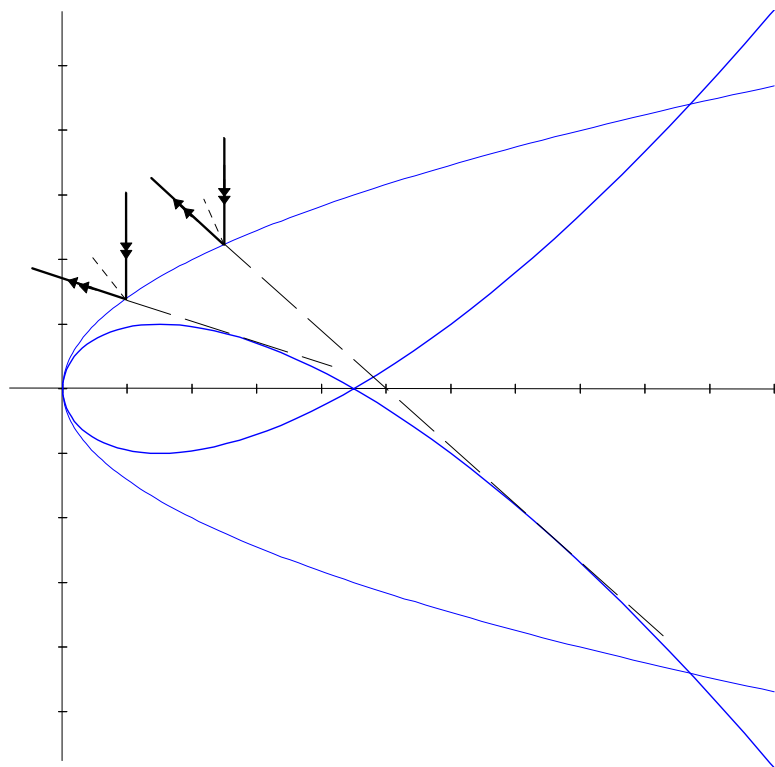
Considérons un point $M(\frac{t^2}{2p}; t)$ de la parabole.

$\frac{dM}{dt}(\frac{t}{p}; 1)$ donc un vecteur directeur de la tangente en M à (P) est le vecteur de coordonnées $(t;p)$ d'où $\vec{n}(p;-t)$ est normal en M à (P) .

Comme les rayons lumineux sont parallèles à (Oy) $(0;1)$ est un vecteur directeur des droites supports des rayons incidents (D_M) .

Déterminons un vecteur directeur $\vec{\delta}$ de (Δ_M) des rayons réfléchis :

Si on note \vec{n} un vecteur directeur de la normale, $\vec{\delta}$ est déterminé par les conditions

$$\begin{cases} \vec{\delta} = a \vec{i} + b \vec{j} \\ \|\vec{\delta}, \vec{n}\| = 1 = \|\vec{n}\| \\ \vec{j} + \vec{\delta} = \lambda \vec{n} \end{cases}$$


On trouve alors $a = \frac{-2tp}{p^2 + t^2}$ et $b = \frac{t^2 - p^2}{p^2 + t^2}$ et

un vecteur directeur de (Δ_M) est $\vec{\delta}(-2tp; t^2 - p^2)$ et une équation de cette droite est alors

$$(x - \frac{t^2}{2p})(t^2 - p^2) = -2tp(y - t).$$

On détermine ensuite le point caractéristique de l'enveloppe de la famille des droites (Δ_M) en déterminant la solution du système formé par (Δ_M) et (Δ'_M) soit le

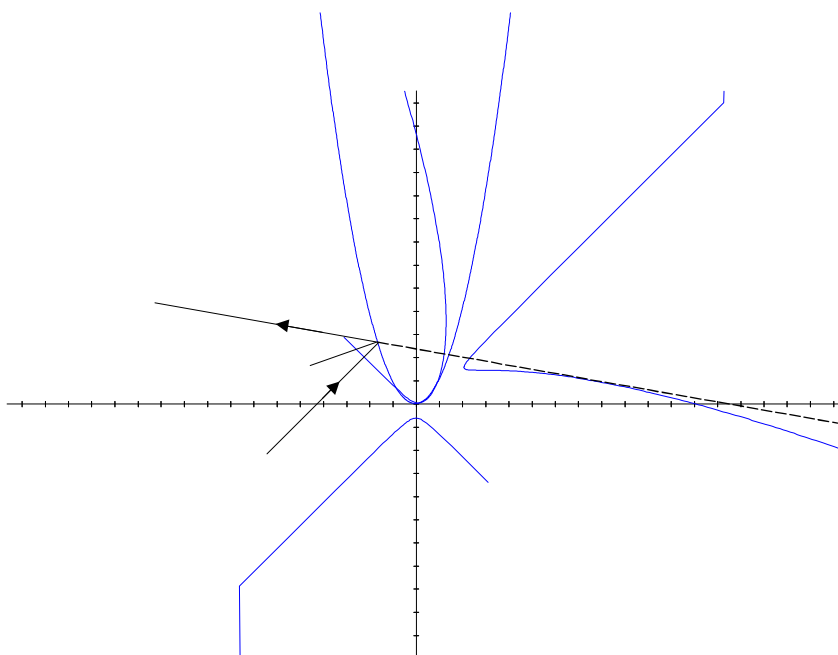
point $\begin{cases} x = \frac{3t^2}{2p} \\ y = \frac{t}{2}(3 - \frac{t^2}{p^2}) \end{cases}$ dont les coordonnées

vérifient

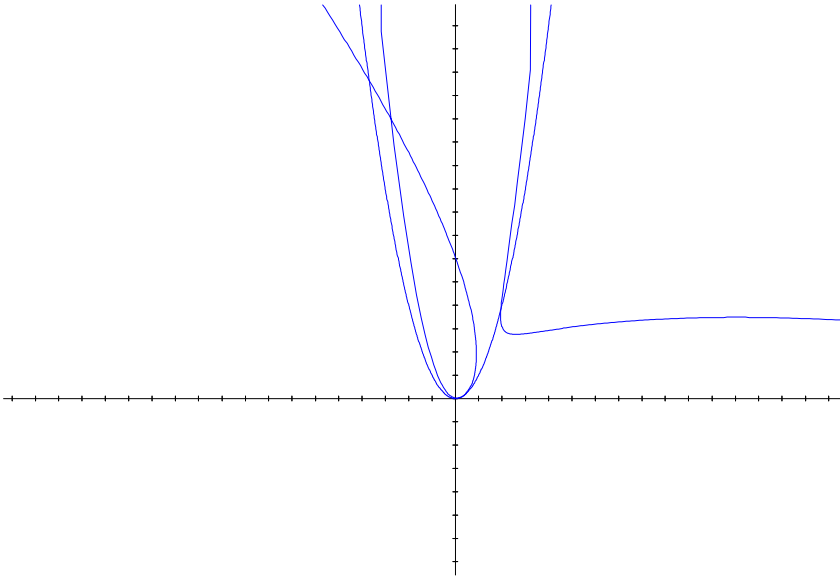
$$y^2 = \frac{px}{6}(3 - \frac{2x}{3p})^2$$

(cubique de Tschirnhausen).

b) Cas où les rayons parallèles forment un angle égal à $\frac{\pi}{4}$ avec la directrice.



c) Cas où les rayons parallèles forment un angle égal à $\frac{\pi}{6}$ avec la directrice.



Remarque :

Dans le cas de miroir dont une équation est $y = ax^k$, $k \neq 1$, la caustique est une courbe de poursuite de Bouguer.

3) Stigmatisme rigoureux

Définition

Le chemin optique $L(A_1A_2)$ entre deux points A_1 et A_2 est la longueur parcourue par la lumière dans le vide pendant le même temps $t_2 - t_1$ qu'elle mettrait à parcourir le trajet $[A_1A_2]$ dans le milieu considéré d'indice

$$n. \quad L(A_1A_2) = \int_{t_1}^{t_2} c dt = \int_{A_1A_2} n \cdot dt$$

Principe de Fermat

Le trajet effectivement suivi par la lumière entre deux points A_1 et A_2 est celui pour lequel le chemin optique $L(A_1A_2)$ est extrémal (en général minimal) soit $dL(A_1A_2) = 0$.

Définition

Un système est dit stigmatique pour un couple de point A et A' si tous les rayons issus de A et pénétrant dans le système en émergent en passant par A' .

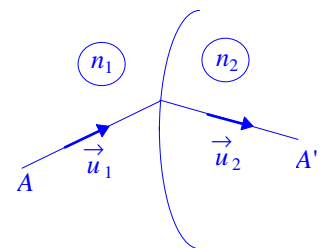
On dit alors que les points A et A' sont conjugués par rapport au système.

Lorsque la lumière suit le trajet A_1A_2 , le chemin optique entre A_1 et A_2 est

$$L(A_1A_2) = n_1 \vec{u}_1 A_1 I + n_2 \vec{u}_2 I A_2$$

où \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont les vecteurs unitaires orientés positivement dans le sens de propagation de la lumière.

La condition de stigmatisme rigoureux pour des points conjugués A et A' s'écrit $L(AA') = c^{ste}$.



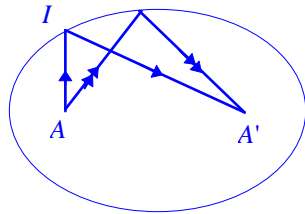
Déterminons les surfaces stigmatiques par réflexion pour un couple de points conjugués A et A' :

a) Lorsque A et A' sont à distance finie et de même nature (réel ou virtuel) :

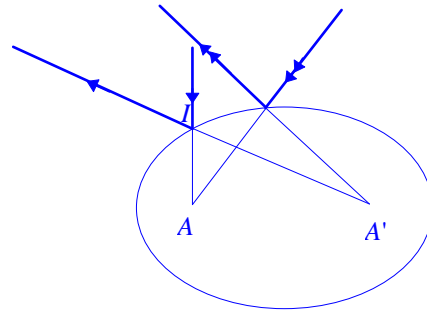
Si A et A' sont réels $AI + IA' = c^{ste}$

Si'ils sont virtuels alors $-AI - IA' = -c^{ste}$ ce qui donne aussi $AI + IA' = c^{ste}$

L'ensemble des points I correspondants à ces relations définit une ellipsoïde de révolution de foyers A et A' .



A et A' sont réels
Miroir concave



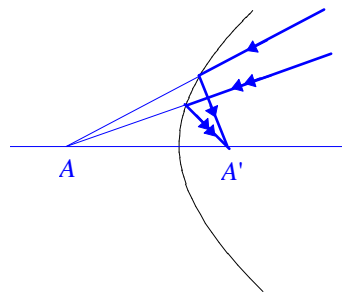
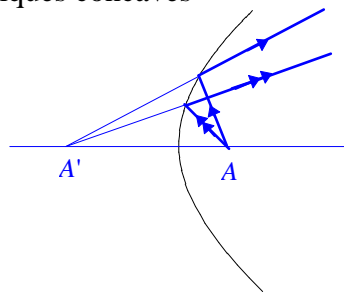
A et A' sont virtuels
Miroir convexe

b) Lorsque A et A' sont à distance finie et de natures différentes (réel et virtuel) :

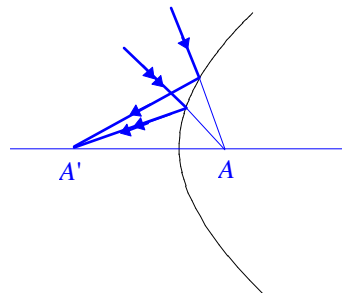
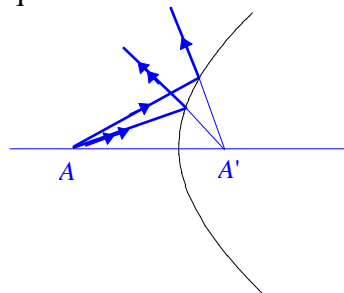
Si A est réel et A' virtuel alors $AI + IA' = c^{ste}$. Dans le cas inverse $-AI + IA' = c^{ste}$.

Dans chaque cas, l'ensemble des points définit une hyperboloïde de révolution de foyers A et A' .

miroirs hyperboliques concaves



miroirs hyperboliques convexes



c) Lorsque l'un des points est envoyé à l'infini et l'autre réel

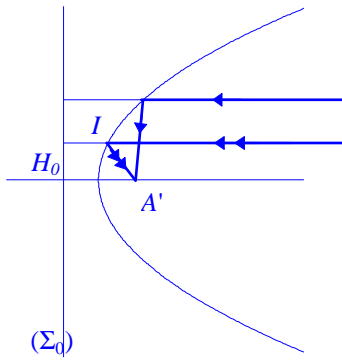
Prenons l'exemple de A à l'infini et A' réel à distance finie.

A étant à l'infini, les rayons incidents forment un faisceau de rayons parallèles. Considérons un plan (Σ) qui leur est orthogonal (surface d'onde). On peut écrire $L(AA') = L(AH) + HI + IA' = c^{ste}$

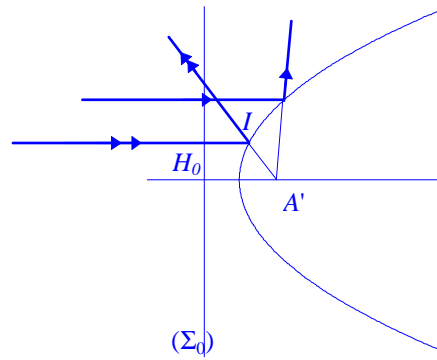
La surface stigmatique pour ce couple de points sera telle que $HI + IA' = c^{ste}$. Cette condition doit être vérifiée quelle que soit la surface (Σ) considérée et en particulier pour celle (Σ_0) qui donne $c^{ste} = 0$.

La condition s'écrit alors $L(H_0I) = -H_0I + IA' = 0$. En effet, comme $IA' \geq 0$ (sens de propagation de la lumière ou A' réel), le point H_0 doit être virtuel et appartenir à une surface (Σ_0) virtuelle ; il lui correspond un chemin optique négatif ou nul.

L'ensemble des points I situés à égale distance d'un plan (Σ_0) et d'un point A' détermine une paraboloides de foyer A' et de plan directeur (Σ_0) .



Miroir parabolique concave



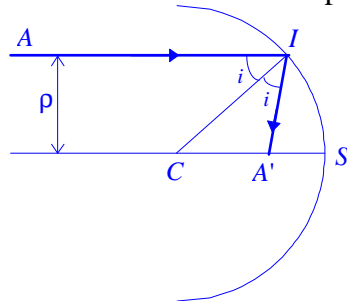
miroir parabolique convexe

Le miroir parabolique concave ainsi défini est utilisé dans de nombreux dispositifs tels que les télescopes, les centrales solaires où, si l'on inverse les positions de A et A' , les projecteurs.

4) Le miroir sphérique

a) Stigmatisme du miroir sphérique

Dans le cas d'un miroir sphérique concave, considérons un faisceau de rayons lumineux parallèles.



Les rayons incidents arrivent sur la surface réfléchissante sphérique sous un angle i qui dépend de la distance ρ du rayon incident à l'axe optique. Soit A' le point d'intersection d'un rayon réfléchi avec cet axe (lorsqu'il coupe l'axe après 1 réflexion).

$$\widehat{IA'S} = \widehat{AIA'} = 2i$$

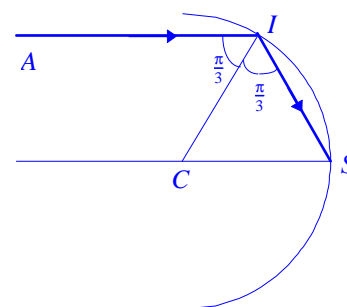
$$\text{d'où } \widehat{CA'I} = \pi - 2i$$

$$\text{Dans le triangle } CIA', \frac{CI}{\sin(\pi - 2i)} = \frac{CA'}{\sin i} \text{ et } CA' = \frac{CI \times \sin i}{\sin 2i} = \frac{CI}{2 \cos i}$$

On constate alors que la position de A' dépend de i et donc de ρ c'est-à-dire du rayon incident considéré. Ce miroir n'est pas stigmatique pour un objet situé à l'infini.

Par contre, pour des rayons voisins de l'axe, i est voisin de 0 et $\cos i \sim 1$ et $CA' \sim \frac{R}{2}$, la position de A' est alors indépendante de i donc de ρ . Tous les rayons lumineux issus du point objet situé à l'infini et voisins de l'axe convergent en A' tel que $CA' = \frac{R}{2}$ c'est-à-dire le milieu de $[CS]$ et appelé le foyer principal du miroir. On dit alors que ce miroir travaille dans l'approximation de Gauss.

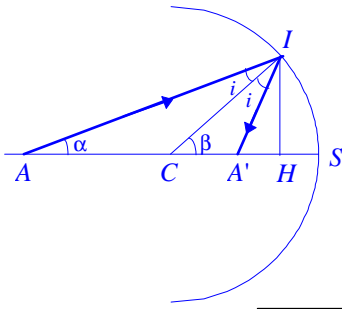
Remarques



Si $i = \frac{\pi}{3}$, $CA' = R = CS$ et A' est confondu avec S .

Si $i \leq \frac{\pi}{3}$, le rayon se réfléchit au moins une seconde fois sur le miroir avant de rencontrer l'axe optique.

Toujours dans le cas d'un miroir concave, considérons un rayon incident $[AI]$ issu d'un point A de l'axe optique du miroir. Le rayon réfléchi coupe l'axe en un point A' .



Dans les triangles CAI et $CA'I$ on a $\frac{CA}{\sin i} = \frac{IA}{\sin \beta}$ et $\frac{CA'}{\sin i} = \frac{IA'}{\sin \beta}$

d'où $\frac{CA}{CA'} = \frac{IA}{IA'}$ (1)

Or $IA^2 = CA^2 + CI^2 + 2.CA.CI.\cos\beta$ et $IA'^2 = CA'^2 + CI^2 - 2.CA'.CI.\cos\beta$

En choisissant comme orientation sur l'axe optique de A vers A', on pose

$z = \overline{CA}$, $z' = \overline{CA'}$ et $\rho = \overline{CS}$,

(1) devient $-\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{z^2 + \rho^2 - 2\rho.z.\cos\beta}}{\sqrt{z'^2 + \rho^2 - 2\rho.z'.\cos\beta}}$

soit $z^2(z'^2 + \rho^2 - 2\rho.z'.\cos\beta) = z'^2(z^2 + \rho^2 - 2\rho.z.\cos\beta)$ ou $\rho^2(z^2 - z'^2) = 2\rho.z.z'.(z - z')\cos\beta$

La relation est satisfaite pour $z = z'$ c'est-à-dire pour le centre qui est lui-même sa propre image.

Sinon, $\rho^2(z + z') = 2\rho.z.z'.\cos\beta$ soit $z' = \frac{\rho.z}{2z.\cos\beta - \rho}$ qui dépend de β .

Ainsi un point objet A ne donne pas une image ponctuelle A' sur l'axe, le stigmatisme n'est pas réalisé. Le seul cas où cela se produit est celui où β est petit car dans ce cas, on retrouve $\cos\beta \sim 1$.

Si les rayons incidents sont peu écartés de l'axe optique, après réflexion, dans les conditions de Gauss, les rayons convergent vers un point unique de l'axe défini par $z' = \frac{\rho.z}{2z - \rho}$ soit $\frac{2}{\rho} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z'}$

soit encore $\frac{2}{\overline{CS}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}}$ qui est la relation de conjugaison entre A et A' (encore appelée relation de

Descartes).

Remarques :

a) Lorsque le point A (ou A' par le principe du retour inverse de la lumière) est envoyé à l'infini, on

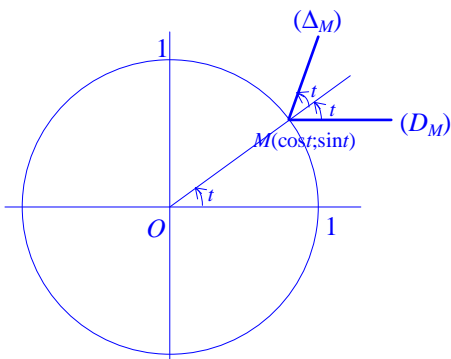
retrouve la position du foyer du miroir $\overline{CF} = \frac{\overline{CS}}{2}$

b) On détermine de manière analogue la relation de conjugaison pour un miroir sphérique convexe :

$$\frac{2}{\overline{CS}} = \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}}$$

Exemple de caustique d'un miroir sphérique pour des rayons lumineux parallèles.

1) Dans le cas d'un miroir sphérique convexe et pour des rayons lumineux parallèles.

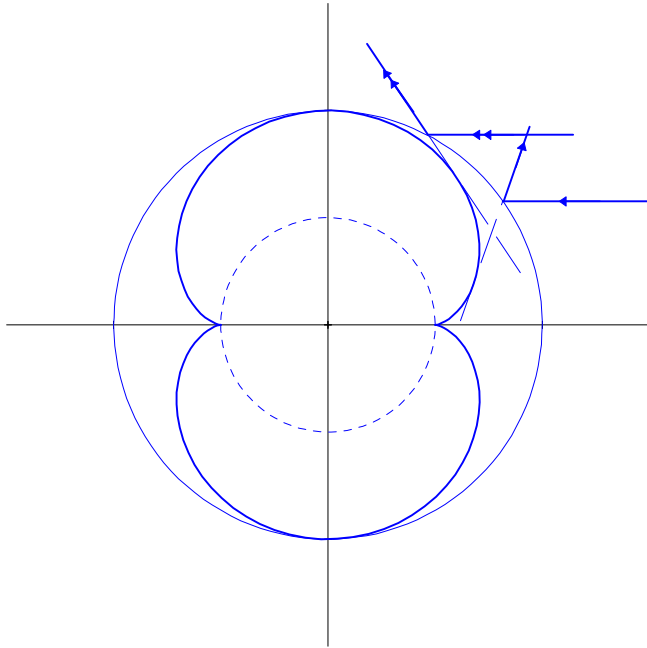


Considérons un cercle de rayon 1 et des rayons lumineux parallèles à l'axe des abscisses réfléchis en un point M de paramétrisation $(\cos t; \sin t)$ sur ce cercle.

(D_M) a ainsi pour équation $y = \sin t$.

Une équation de la droite (Δ_M) est alors $y - \sin t = \tan 2t(x - \cos t)$ soit encore $(\Delta_M) : \cos 2t.y - \sin 2t.x = -\sin t$

Pour déterminer l'enveloppe des droites (Δ_M) déterminons le point caractéristique intersection de la droite (Δ_M) avec la droite notée (Δ'_M) d'équation obtenue par dérivation de celle de (Δ_M) suivant t.



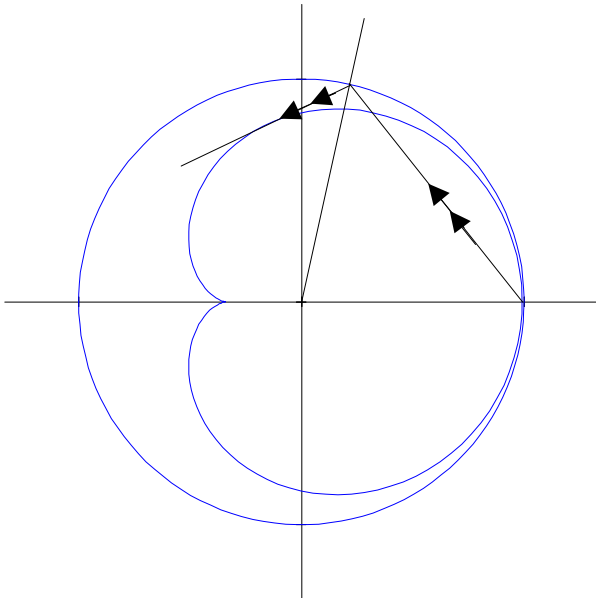
On obtient alors le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(3\cos t - \cos 3t) \\ y = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t) \end{cases}$$

qui est le point de la néphroïde du cercle de rayon $\frac{1}{2}$
(et donc la courbe du point d'un cercle de rayon $\frac{1}{4}$
roulant sans glisser sur un cercle de rayon $\frac{1}{2}$).

On retrouve la même caustique dans le cas d'un miroir sphérique concave et pour un faisceau de rayon lumineux parallèles.

2) Dans le cas où les rayons lumineux proviennent d'une source ponctuelle située sur le cercle. L'enveloppe de la famille des rayons réfléchis est une cardioïde.



Plus généralement (propriété due à Cayley), lorsque les rayons issus d'un point d'un cercle se réfléchissent n fois sur le cercle, l'enveloppe des derniers rayons réfléchis est une épicycloïde engendrée dans le roulement d'un cercle de rayon $\frac{nR}{2n+1}$ sur un cercle de rayon $\frac{R}{2n+1}$, R étant le rayon du cercle donné.

Bibliographie :

- *Courbes géométriques remarquables*, H. Brocard et T.

Lemoyne, Librairie scientifique et technique, Albert Blanchard, 3 tomes, 1967.

Traité des courbes spéciales remarquables, Francisco Gomes Teixeira, 3 tomes, Rééditions Jacques Gabay.