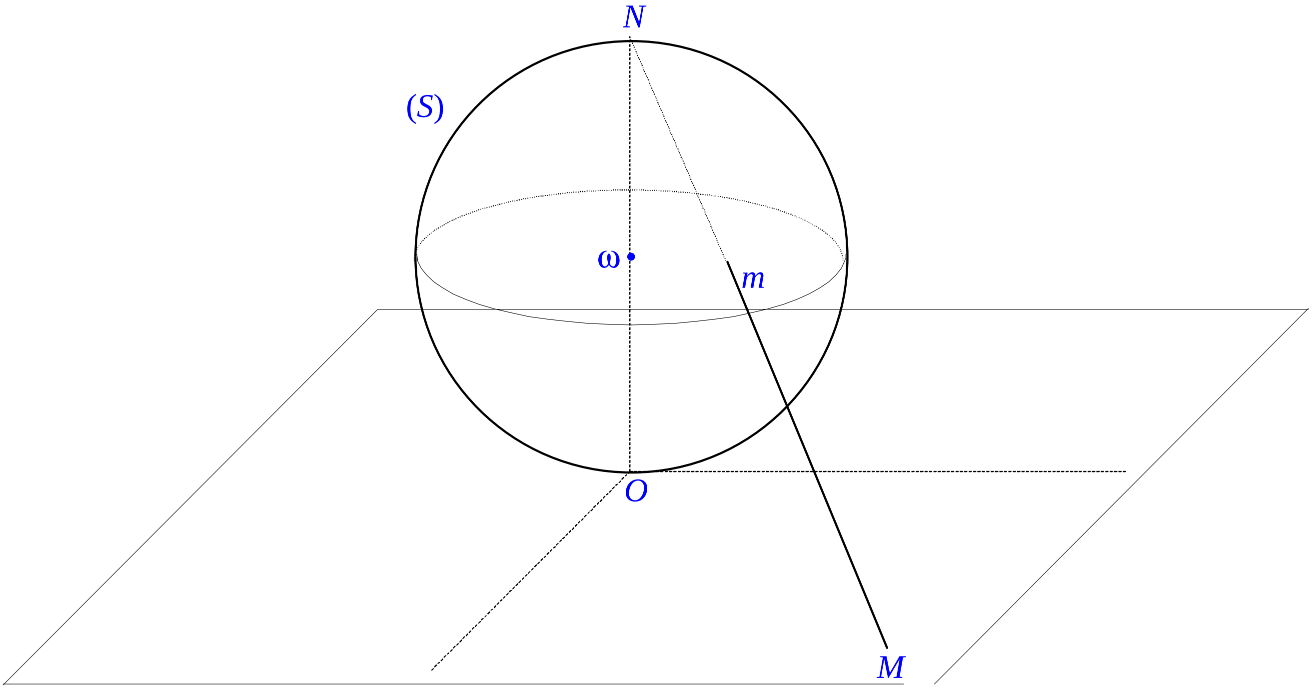
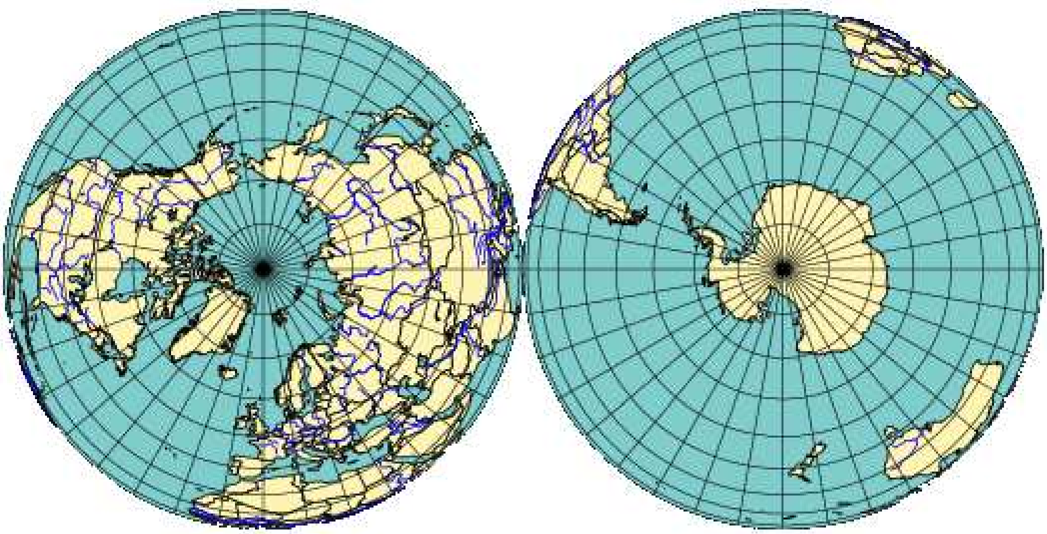
I. La projection stéréographique

Considérons une sphère (S) et un point N de cette sphère (que nous pouvons assimiler à son "pôle nord").
La projection stéréographique est la projection centrale de la sphère sur le plan tangent au pôle sud.
Notons (P) ce plan tangent au point diamétralement opposé au point N sur la sphère (S), le point O.
Cette transformation est alors une bijection de la sphère (S) privée du point N sur le plan (P).

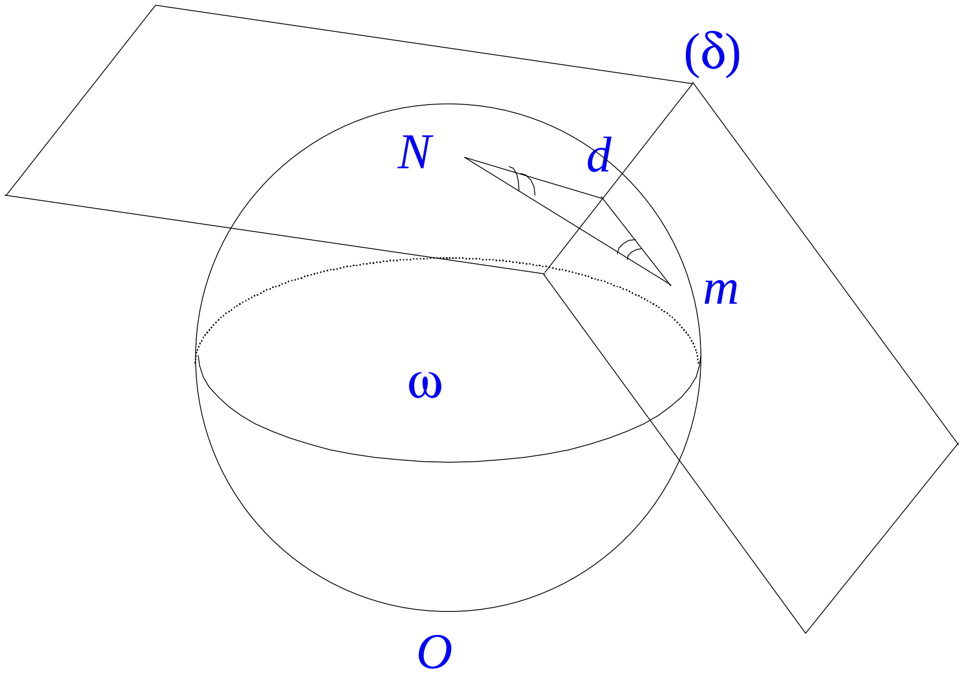




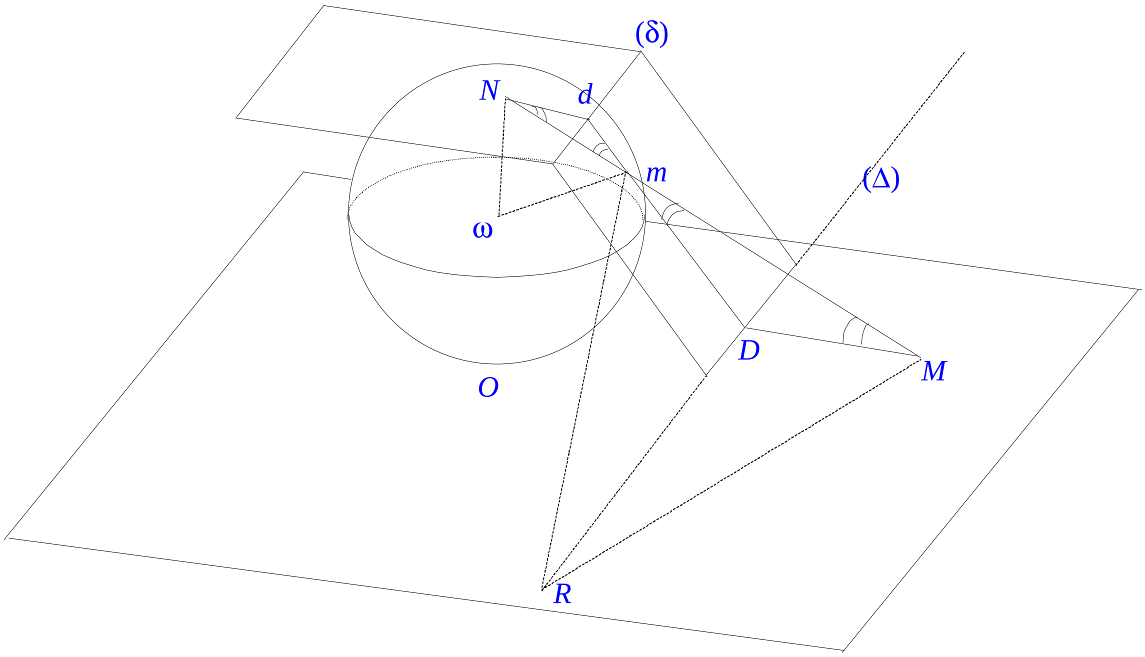
a) Considérons un point m, distinct de N, sur (S). Notons (δ) la droite d'intersection entre les plan tangents à (S) aux points N et m.

Soit d le projeté orthogonal commun aux points N et m sur la droite (δ).
On a

$$(\overrightarrow{Nm};\overrightarrow{Nd}) = (\overrightarrow{md};\overrightarrow{mN})$$



b) Notons (Δ) la droite d'intersection du plan tangent en *m* à la sphère (*S*) et (*P*).



Puisque les plans tangents en *N* et en *O* (le plan (*P*)) sont parallèles alors $(\overrightarrow{Nm};\overrightarrow{Nd}) = (\overrightarrow{Mm};\overrightarrow{MD})$, et le triangle *mMD* est isocèle en *D*.
De plus, le plan tangent en *N* est perpendiculaire à (*N*ω) donc (δ) ⊥ (*N*ω)
De même, (δ) ⊥ (*N*m)

$$\text{Donc } (\delta) \perp (N\omega m)$$

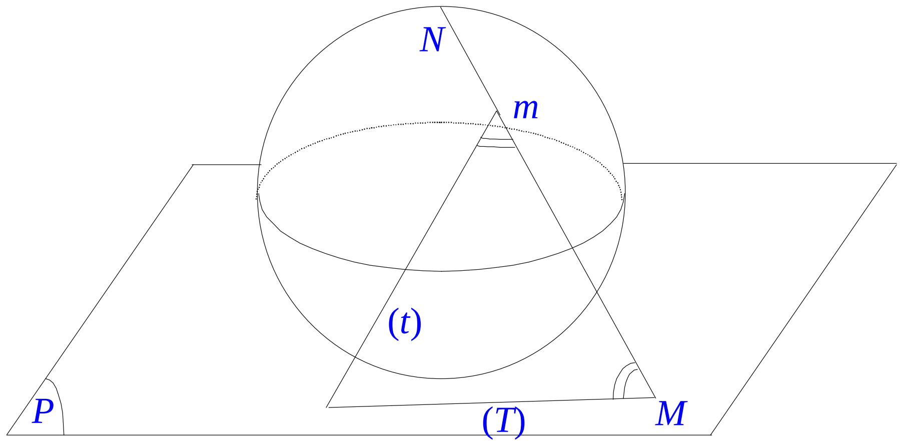
Or les droites (δ) et (Δ) sont parallèles car elles se trouvent à l'intersection d'un plan avec deux plans parallèles et, de plus, les points *N*, *m*, *M*, ω, *d*, *D* étant coplanaires, on obtient

$$(\Delta) \perp (mMD)$$

Si *R* est un point de (Δ), en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles *Rdm* et *RDM* et puisque le triangle *mMD* est isocèle en *D* alors *RmM* est isocèle en *R* et

$$(\overrightarrow{mR};\overrightarrow{mM}) = (\overrightarrow{Mm},\overrightarrow{MR}).\ (\bullet)$$

c) Utilisons ce résultat pour démontrer que la projection stéréographique est une transformation conforme (c'est-à-dire qu'elle conserve les angles).
Soit (t) une tangente à (S) en m de projection M sur (P).
Soit alors (T) la droite projection de (t) sur (P).



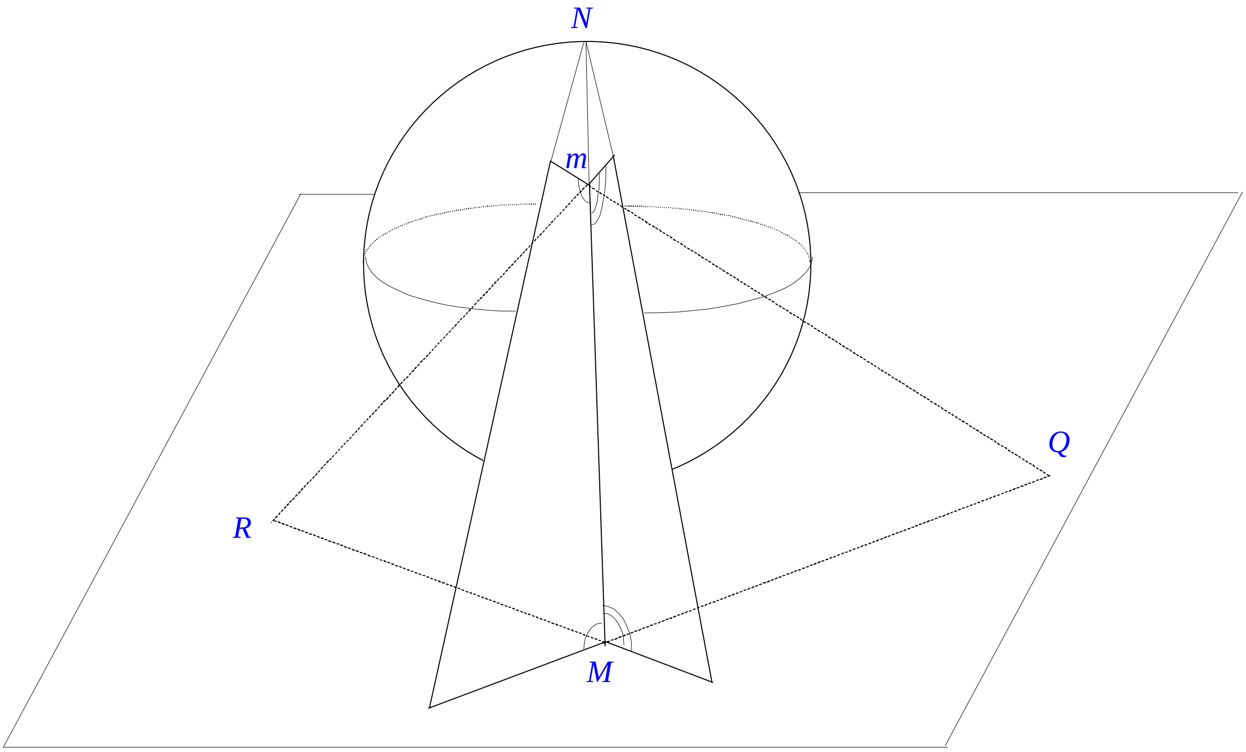
Nous savons que l'angle de droites formé par la droite (NM) avec la droite (t) d'une part et avec la droite (T) d'autre part sont égaux.

Considérons deux tangentes (t_1) et (t_2) à la sphère (S) au point m et leurs images (T_1) et $(T2)$ par la projection. Elles contiennent donc le point M projeté du point m par la projection stéréographique.
Notons

$$R = (t_1) \cap (T_1)$$

et

$$Q = (t_2) \cap (T_2).$$



Les triangles RMm et QMm sont des triangles isocèles respectivement en R et Q donc ces deux points se trouvent sur le plan médiateur de $[mM]$.

Ce plan est un plan de symétrie de la figure. L'angle formé entre les droites (t_1) et (t_2) est égal à l'angle formé entre (T_1) et (T_2).

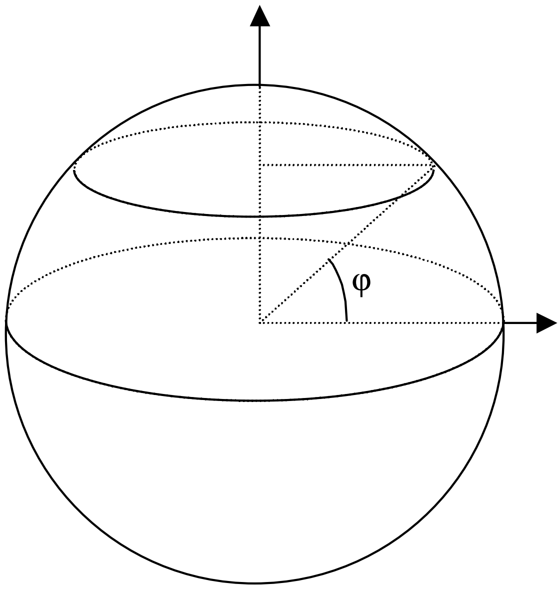
Les Loxodromies

Un des premiers problèmes de la navigation est de connaître la position respective des endroits que l'on désire relier et la route à tenir en haute mer pour aller de l'un à l'autre. Ce problème avait fait un immense progrès avec l'invention de la boussole, vers 1300 : elle permettait de tenir un cap défini à partir de la rose des vents, que les navigateurs appelaient un *rhumb* de vent. La ligne parcourue sur le globe terrestre s'appelle dans ce cas, une *loxodromie* (du grec *loxos* signifiant *oblique*, *de travers*, et dromos qui signifie *course* ou *route*). (On appelle loxodromies sur la sphère les courbes qui font un angle constant avec tous les méridiens. Les projections stéréographiques des loxodromies sont des spirales logarithmiques.)

Les portugais eurent l'idée de développer la surface du globe terrestre en étendant les méridiens en lignes droites verticales coupées perpendiculairement par les parallèles à l'équateur. C'étaient les premières cartes employées par les navigateurs, appelées *cartes plates* parce qu'elles sont en quelque sorte formées de la surface du globe qu'on a aplatie.

L'intérêt de cette disposition des méridiens parallèles verticalement tient en ceci que la trace du vaisseau qui parcourt un certain rhumb de vent, autrement dit la *loxodromie*, se marque sur la carte par une ligne droite, puisque les intersections de cette route avec les méridiens se font à angle constant.

Son inconvénient réside dans le fait que, sur la carte, les parallèles se retrouveront tous de la même longueur, égale à celui de l'équateur alors qu'en réalité, ils sont de plus en plus courts à mesure que l'on se rapproche du pôle.



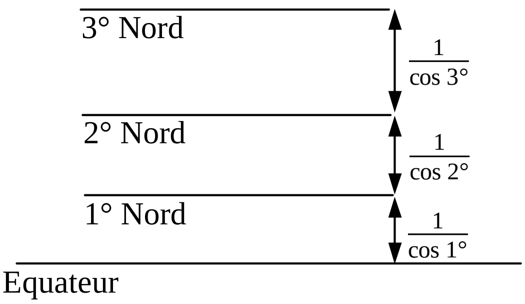
Pour préserver également l'angle avec les parallèles; Gérard Kremer dit Mercator (1512-1594) eut l'idée d'espacer ceux-ci de plus en plus à mesure que l'on s'approche du pôle.

La longueur du parallèle situé à une latitude φ est proportionnelle à celle de l'équateur, une réduction d'un facteur $\dfrac{1}{\cos\varphi}$.

Si on veut que l'angle de la carte soit égal à celui que l'on mesure sur le bateau (le rhumb), il faut que les triangles sur la carte soient semblables aux triangles réels qu'ils représentent (ces triangles sont en réalité sphériques, mais sur une distance assez petite, ils peuvent être assimilés à des triangles plats).

En ne tenant pas compte de l'échelle de la carte, le parallèle situé à la latitude n, n entier, sera représenté à la hauteur $h(x)$ au-dessus de l'équateur avec :

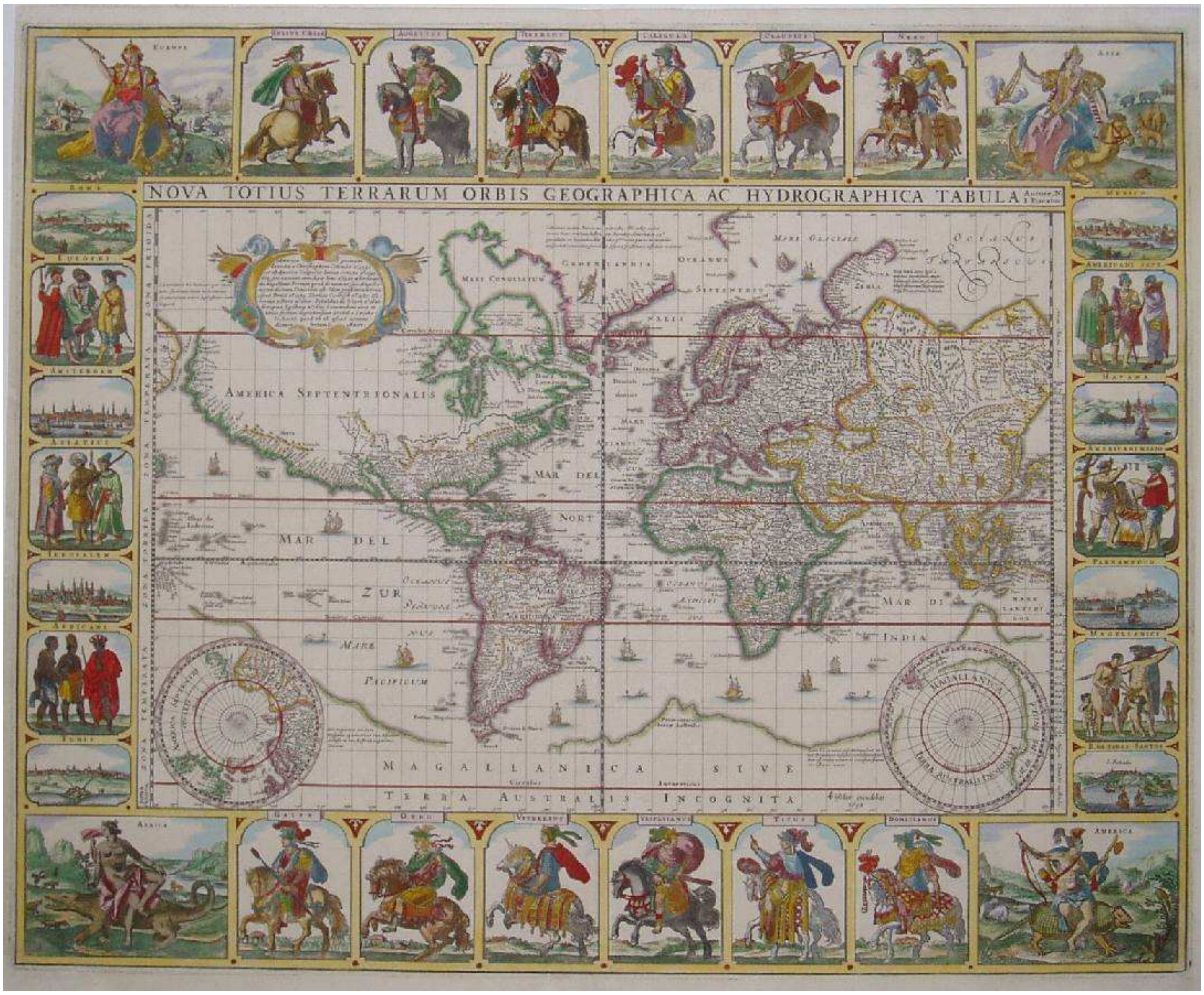
$$h(x) = \frac{1}{\cos 1°} + \frac{1}{\cos 2°} + \dots + \frac{1}{\cos n°}.$$



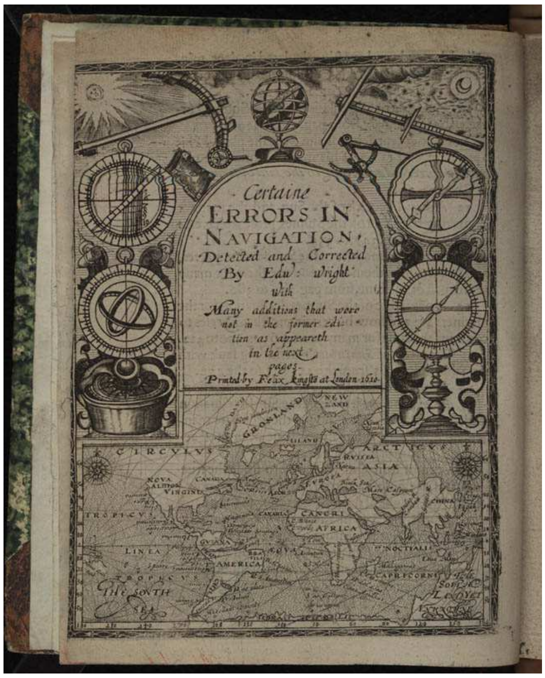
Pour une valeur réelle quelconque d'angle φ, la hauteur sur la carte par rapport à l'équateur, sera

$$\int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos\theta}\, d\theta = \ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

où les angles sont exprimés en radians.



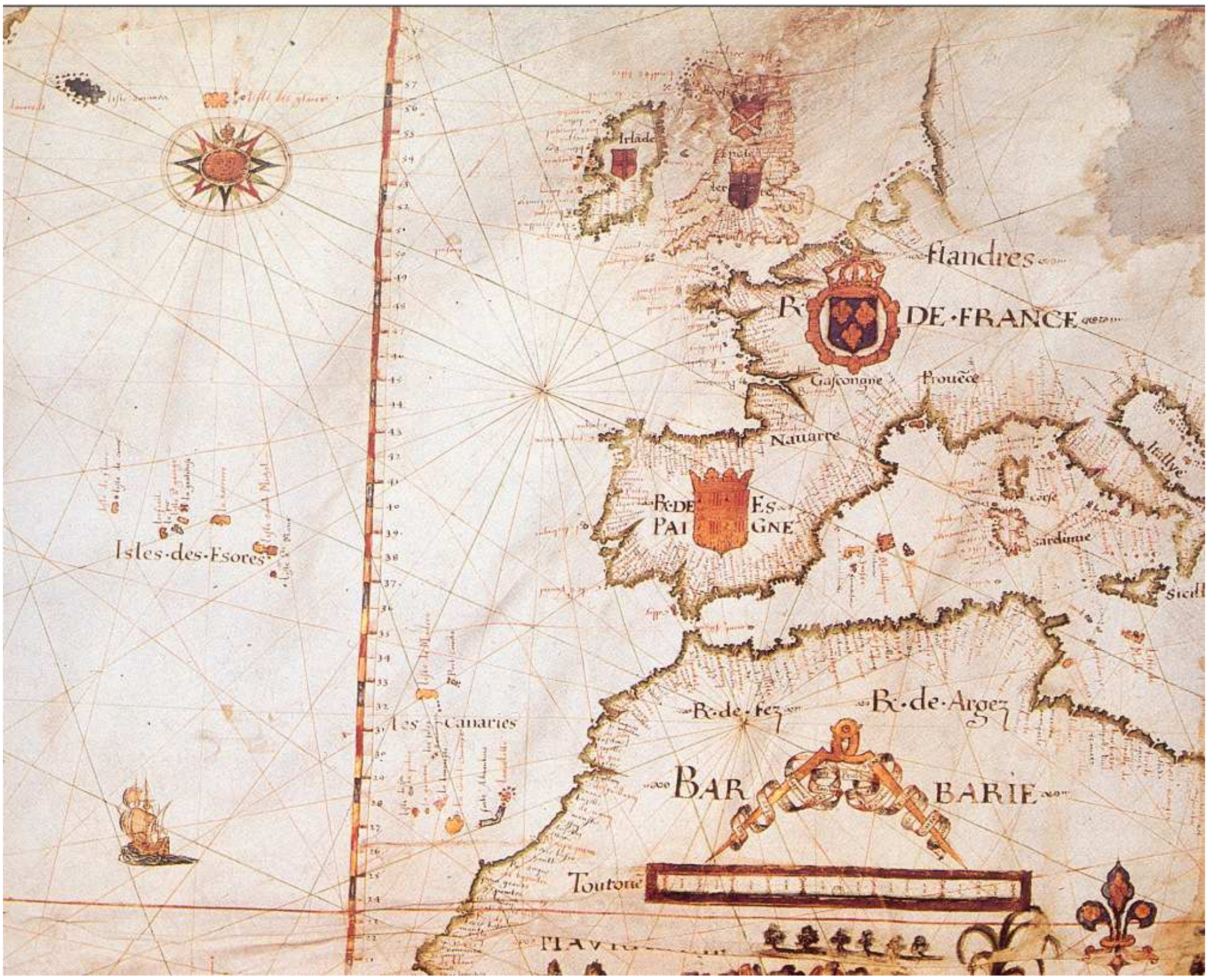
Carte du monde de N.Visscher en 1652 utilisant la projection de Mercator



En 1599, l'anglais Edward Wright (1580-1615) publie une table de sommes $\sum_k \frac{1}{\cos\varphi_k}$ où les φ_k sont pris de 1" en 1", dans un ouvrage intitulé *Certaine Errors in Navigation corrected*.

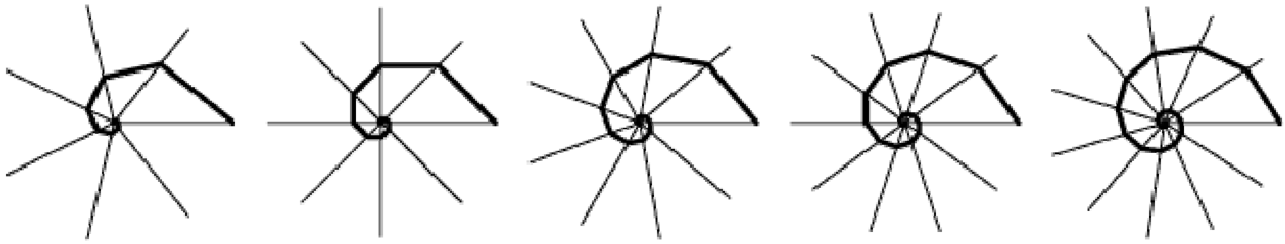
Dans une publication parue en 196 dans les *Philosophical transactions*, Edmund Halley (1656-1743) revient sur le travail de Wright et y présente *An easie Demonstration of the Analogy of the Lagorithmick Tangents to the Meridian Line or sum of the Secants.* Il y montre en particulier que *sur le Globe, les lignes de rhumbs font un angle constant avec chaque méridien, et, …, également un angle constant avec les méridiens en projections stéréographique sur le plan de l'équateur.*

Pierre de Vaulx, Carte de l’Atlantique, 1613, le Havre

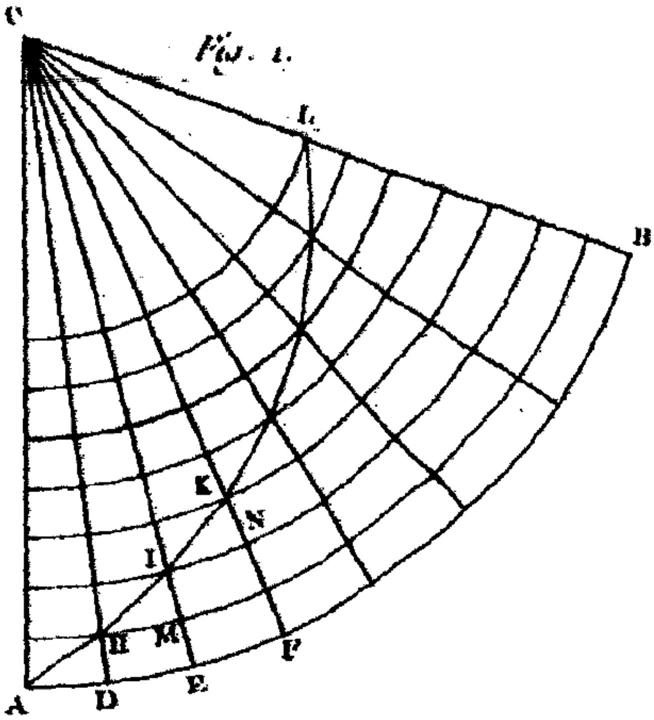


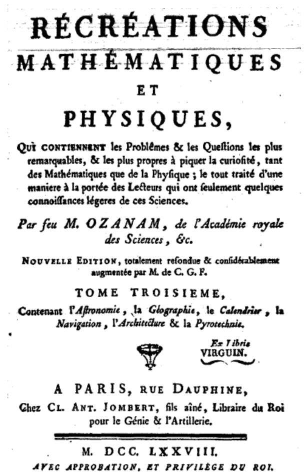
Cette carte possède un système de 32 rhumbs.

La spirale logarithmique est la courbe pour laquelle l'angle en un point entre la droite (*OM*) et la tangente en ce point est constant.



On en trouve une illustration dans les *Récréations Mathématiques et Physiques* d'Ozanam (1640-1717).





RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES
ET
PHYSIQUES,

QUI CONTIENNENT les Problêmes & les Questions les plus remarquables, & les plus propres à piquer la curiosité, tant des Mathématiques que de la Physique ; le tout traité d'une maniere à la portée des Lecteurs qui ont seulement quelques connoissances légeres de ces Sciences.

Par feu M. OZANAM, de l'Académie royale des Sciences, &c.

NOUVELLE EDITION, totalement refondue & considérablement augmentée par M. de C. G. F.

TOME TROISIEME,

Contenant l'*Astronomie*, la *Géographie*, le *Calendrier*, la *Navigation*, l'*Architecture* & la *Pyrotechnie*.

Ex libris VIRGUIN.

A PARIS, RUE DAUPHINE,
Chez CL. ANT. JOMBERT, fils aîné, Libraire du Roi pour le Génie & l'Artillerie.

M. DCC. LXXVIII.
AVEC APPROBATION, ET PRIVILÈGE DU ROI.

Elément d'une planche de récréations Mathématiques et Physiques, tome III, Ozanam.

Dans la projection stéréographique de centre un pôle et de plan de projection le plan de l'équateur, les méridiens sont des rayons d'un cercle de centre l'image de l'autre pôle.
Le rhumb choisi comme exemple par Ozanam est incliné de 60° sur les méridiens. La ligne polygonale *AHIKL* donne une idée discrétisée de la loxodromie. En effet, la projection stéréographique étant une projection conforme, c'est-à-dire, conservant les angles, la ligne projection fera également des angles constants par rapport aux projections des méridiens.

En coordonnées polaires, si la loxodromie a pour équation $r = r(\theta)$ alors

$$\frac{r'}{r} = \frac{1}{\tan(180 - \theta)} \text{ et donc } r(\theta) = ke^{\frac{\theta}{\tan(180-\theta)}} \text{ et la courbe est une spirale logarithmique.}$$