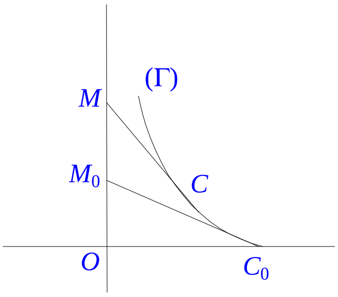
Courbes de Poursuite

Elles ont été étudiées par Bouguer dès 1732 dans un mémoire intitulé *Problème de la route du vaisseau à la chasse d'un autre* (Mémoires de l'Académie des Sciences). Bouguer examinait le cas où le vaisseau poursuivi suit une ligne droite[1]. Il semble que ce problème fut également considéré par Léonard de Vinci.
Une autre formulation du problème est de déterminer la ligne décrite par un chien qui court après son maître lorsque celui-ci suit un chemin rectiligne d'un mouvement uniforme. C'est pour cela que l'on nomme également cette courbe *courbe du chien*.

C et M représentent les positions respectives du chien et du maître. Supposons que la position initiale du chien soit C_0 telle que $OC_0 = a$ sur l'axe des abscisses et que le maître parcourt l'axe des ordonnées à partir d'une position M_0 telle que $OM_0 = b$. Considérons que le chien et le maître aient des vitesses respectives égales à c et m.

Comme à tout moment le chien se dirige vers le maître, les droites (CM) doivent être tangentes à la courbe décrite par le chien ou encore l'enveloppe des droites (CM) sera la courbe recherchée.



L'équation de la tangente (MC) est de la forme

$$y - y_C = \frac{dy_C}{dx_C}(x - x_C)$$

En prenant $x = 0$, on trouve la position du point M qui est

$$OM = y_C - \frac{dy_C}{dx_C}x_C$$

Ou encore, en notant $y_C' = \dfrac{dy_C}{dx_C}$

$$OM = y_C - y_C'x_C$$

Dans le temps dt, le chien parcourt l'élément ds avec une vitesse c et le maître parcourt l'élément $d(OM)$ avec une vitesse m :

$$\frac{d(OM)}{dt} = m \text{ et } \frac{ds}{dt} = c$$

La courbe recherchée (Γ) a donc pour équation différentielle

$$\frac{d(OM)}{ds} = \frac{m}{c} \text{ soit } \frac{d(y_C - y_C'x_C)}{ds} = n$$

ou

$$\frac{dy_C'}{\sqrt{1 + y_C'^2}} = n\frac{dx_C}{x_C} \text{ c'est-à-dire } \frac{y_C''}{\sqrt{1 + y_C'^2}} = \frac{n}{x_C}$$

qui s'intègre en

$$\ln(y_C' + \sqrt{1 + y_C'^2}) = n\ln x_C + k \ , k \in \mathbb{R}$$

soit

$$y_C' + \sqrt{1 + y_C'^2} = kx^n \ , \ k \in \mathbb{R}$$

[1] Maupertuis, dans le même tome, généralisa le problème en supposant que la route du vaisseau poursuivi est quelconque et il obtint l'équation différentielle qui répond à la question.

Qui se transforme successivement en

$$\sqrt{1 + y_C'^2} = kx^n - y_C'$$

$$1 + y_C'^2 = k^2x^{2n} + y_C'^2 - 2kx^n y_C'$$

$$y_C' = k\frac{x^n}{2} - \frac{1}{2k}x^{-n}$$

et réciproquement de telles solutions conviennent.

Une seconde intégration donne

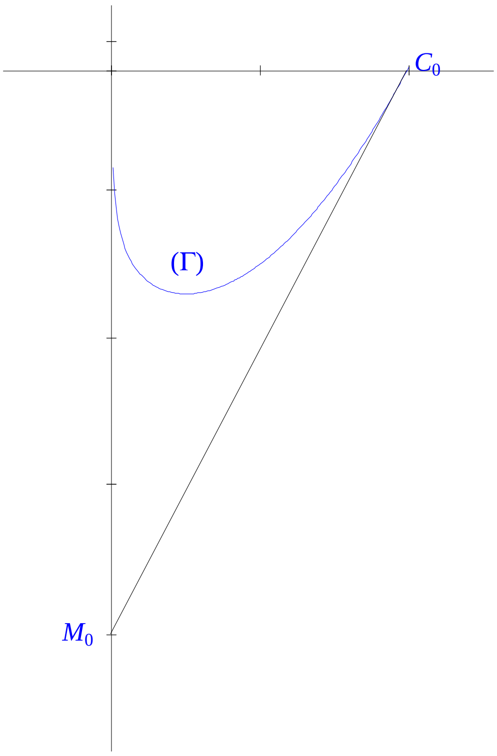
Si n ≠ 1

$$y_C + B = \frac{A}{2(n+1)}x_C^{n+1} - \frac{1}{2A(-n+1)}x_C^{-n+1}$$

Les constantes A et B étant données par les conditions initiales, c'est-à-dire si $x_C = a$ alors $y_C' = -\frac{b}{a}$ et $y = 0$.

Si $n = 1$, c'est-à-dire lorsque le chien et le maître ont même vitesse, on a

$$y_C = \frac{Ax_C^2}{4} - \frac{1}{2A}\ln x_C + B$$

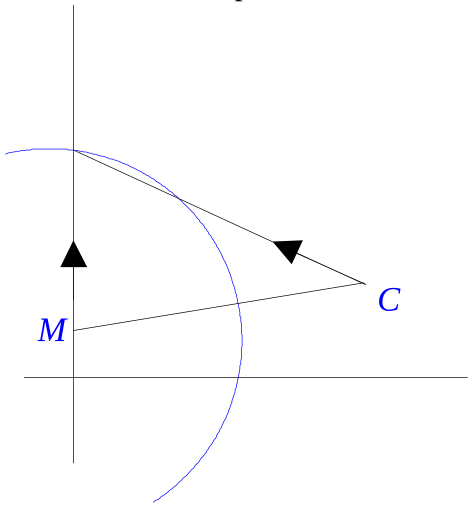


Lorsque la poursuite ne consiste plus à essayer de se diriger directement vers sa proie mais éventuellement de "couper" sa trajectoire, le problème devient résoluble en déterminant l'ensemble des points accessibles simultanément par les deux vaisseaux :

Supposons le vaisseaux M poursuivi par le vaisseau C avec les même vitesses respectives m et c. En un instant t, la distance parcourue par le vaisseau M est $m \times t$, celle du vaisseau C sera $c \times t$.
Ainsi, l'ensemble des points simultanément atteints sera l'ensemble des points S vérifiant, pour tout t, $MS = mt$ et $CS = ct$ soit $t = \frac{MS}{m} = \frac{CS}{c}$

$$\text{d'où } \frac{MS}{CS} = \frac{m}{c}$$

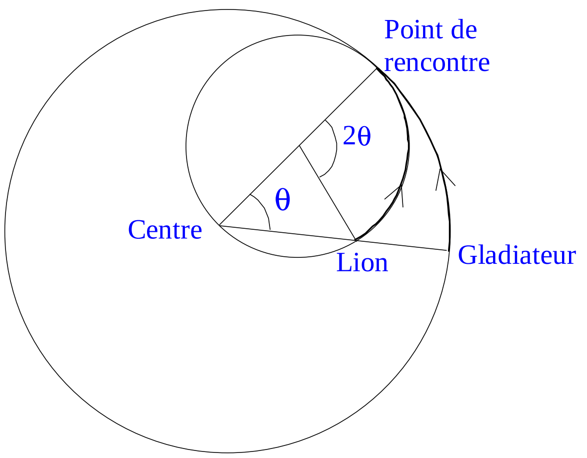
On reconnaît une ligne de niveau ou cercle d'Apollonius.



Si ce cercle a une intersection sur la demi-droite où M se dirige, cette intersection est le point de rencontre possible des deux vaisseaux. Sinon, il n'y a pas de rencontre possible.

Comme dans la situation précédente, c'est-à-dire lorsque la place le permet, la meilleur façon d'échapper à un éventuel poursuivant est de s'en éloigner sur la demi-droite "opposée" à ce poursuivant.
Un autre problème correspond à la situation du gladiateur tentant d'échapper aux griffes d'un lion dans une arène circulaire ; prédateur et proie sont alors confinés dans un espace restreint. Pour que sa résolution ne soit pas trop évidente, considérons que le gladiateur et le lion ont même vitesse.

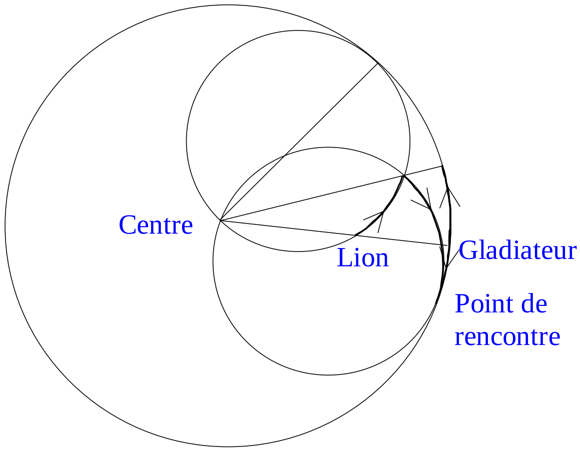
Une première situation correspond au gladiateur placé sur le bord extérieur de l'arène qui est un cercle et qui tente d'échapper au lion. Dans ce cas, le lion peut toujours rattraper le gladiateur :



Si le gladiateur ne change pas de sens de parcours sur le cercle, comme sur le schéma ci-contre

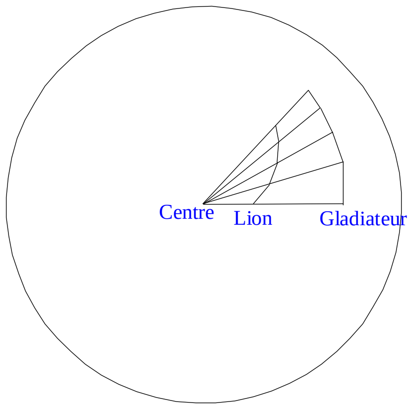
Le gladiateur parcourt une distance égale à la longueur d'un arc de cercle d'angle θ et de rayon *R*, celui de l'arène. Le lion doit alors parcourir la longueur d'un arc de cercle d'angle 2θ et de rayon $\frac{R}{2}$ c'est-à-dire la même distance que le gladiateur. Comme les vitesses sont égales, le lion va dans ce cas rattraper le gladiateur.

Si le gladiateur effectue des changements de sens dans le parcourt de ce cercle extérieur, la situation ne va guère changer pour lui.
Il suffit au lion de changer de cercle de diamètre le rayon de l'arène pour parcourir la même distance que le gladiateur et s'en rapprocher jusqu'à atteindre le cercle extérieur.



Dans le cas où le gladiateur ne se trouve pas sur le cercle extérieur mais en un point quelconque de l'intérieur de l'arène.

Le gladiateur doit alors décrire une spirale faite de segments successifs, chacun à angle droit du rayon et de longueur strictement inférieure à la précédente, pour ne pas sortir du cercle, et le lion restera sur le rayon joignant le gladiateur au centre de l'arène en "coupant" la trajectoire du gladiateur.



Bibliographie :

- *Courbes géométriques remarquables*, H. Brocard et T. Lemoyne, Librairie scientifique et technique, Albert Blanchard, 3 tomes, 1967.
Traité des courbes spéciales remarquables, Francisco Gomes Teixeira, 3 tomes, Rééditions Jacques Gabay.
- *Visions géométriques,* Ian Stewart, Bibliothèque Pour la Science, Belin, 1994.