le calcul vectoriel

Les nombres complexes étaient utilisés par les mathématiciens depuis le XVI^{e} siècle mais seulement comme des symboles ou accessoires de calcul mais on leur refusait le statut de nombre car on ne pouvait imaginer les grandeurs matérielles dont la mesure puisse être exprimée par un imaginaire.

La première tentative significative est due à l'initiative de Leibniz vers 1679. Il fonde sa *géométrie des situations* sur une relation de congruence entre ensembles de points : deux couples de points sont congruents si dans chaque couple les deux points sont à la même distance, deux triplets sont congruents si les deux triangles sont superposables, etc ...Leibniz appliquera son calcul à la résolution de quelques problèmes assez élémentaires mais ne donnera jamais de suite.
En 1685, John Wallis proposa de représenter géométriquement dans un repère du plan les racines imaginaires d'une équation du second degré.
En 1797, un arpenteur-géomètre Caspar Wessel proposa à l'Académie Royale des Sciences et des Lettres du Danemark un mémoire sur la représentation analytique des directions et y donna entre autres, la règle du parallélogramme pour la somme de deux vecteurs.
L'abbé Buée développa longuement mais d'une manière confuse, un mémoire à Londres en 1806.
Robert Argand, né en 1768 à Genève publia son "*Essai sur la manière de représenter géométriquement les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*".
L'allemand Gauss, bien que publiant en 1831 seulement, dans un article intitulé *Theoria residuorum biquadraticum, commentation secunda*, sur la représentation géométrique des imaginaires (mais sa réputation permit enfin à cette notion de se développer), affirma avoir eu des idées sur cette question dès 1799.
L'adhésion de Cauchy permit aussi de donner aux nombres complexes la place privilégiée qu'ils occupent encore aujourd'hui au sein des mathématiques. Son *mémoire sur les quantités géométriques* datant de 1847 présente la théorie de la représentation géométrique des complexes dans un exposé complet. Encore une fois, il réalise la synthèse des travaux antérieurs qui donna à la nouvelle théorie sa pleine maturité.

Le terme de "vecteur" apparu pour la première fois en 1843 dans l'œuvre de l'irlandais Hamilton, pour désigner une partie d'un quaternion (partie qui désigne la direction d'une "droite orientée" dans l'espace physique).
Mais ce fut bien avant le XIX^{e} siècle, et sa reconnaissance par les mathématiciens que la notion de vecteur ou plus particulièrement de rayon-vecteur, qu'il était utilisé en astronomie où il désignait le segment de droite joignant un point fixe à un astre. Ce ne fut que dans la deuxième moitié du XIX^{e+} siècle que le lien fut établit entre la mécanique et les vecteurs des mathématiciens.

La représentation des forces et des vitesses en vue de leur composition par la règle du parallélogramme était connue depuis longtemps, on la fait remonter

aux savants grecs : Heron d'Alexandrie et Archimède. Simon Stevin en 1586 tout d'abord puis Galilée dans sa "*Méchanique*" de 1593-1594 en donne un énoncé dans le cas particulier de directions orthogonales.
Ensuite, Roberval et Varignon dans "*Projets pour une nouvelle mécanique*" connaissent et utilisent cette règle pour la composition de mouvements et des forces.

Lorsque les forces qui agissent sur un corps ne sont pas équilibrées, le corps va alors subir un mouvement accéléré. La branche de la mécanique consacrée à ces mouvements est la dynamique. Elle a été mise au point par Newton (après les travaux préliminaires de Galilée) dans son célèbre ouvrage "*Les principes mathématiques de la philosophie naturelle*" en 1687.
A l'équilibre, le domaine de la mécanique qui étudie les forces s'intitule la statique.

Dans l'étude du courant sinusoïdal, on peut représenter le lien entre les intensités et les tensions instantanées par les vecteurs de Fresnel mais aussi par les nombres complexes.

La représentation vectorielle de Augustin Fresnel (1788–1827)

Les principes de la construction de Fresnel furent exposés dans son *Mémoire sur la diffraction de la lumière* de 1819.

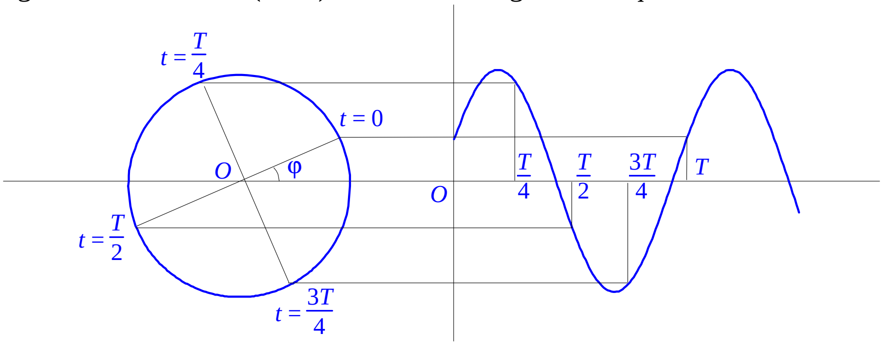
- la pulsation ω du mouvement sinusoïdal est numériquement égale à la vitesse angulaire du vecteur tournant.
- la phase φ est égale à l'angle que fait le vecteur tournant avec l'axe $(O, \vec{i})$ à l'instant initial $t = 0$.

Toute grandeur sinusoïdale s'écrire $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ (dans le cas où $y = A\cos(\omega t + \varphi')$, il suffit de remplacer φ' par $\varphi + \frac{\pi}{2}$).

- ω est la pulsation ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période et $T = \frac{1}{f}$)
- φ est la phase à l'origine et vérifie $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

On lui associe le vecteur $\overrightarrow{OA}$, dont le module est égal à l'amplitude a. Le vecteur tourne dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ autour de son origine O, à vitesse angulaire constante ω (rad/s) dans le sens trigonométrique.

Comme la dérivée de la fonction $x \rightarrow a\sin(\omega t + \varphi)$ est la fonction $x \rightarrow \omega a\cos(\omega t + \varphi) = \omega a\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$, la grandeur sinusoïdale (ou action ou mouvement) dérivée par rapport à t est une grandeur sinusoïdale de même centre, même pulsation ω, et dont le vecteur tournant se déduit de celui de l'initial par une similitude de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport ω.



Puisque le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a un module constant, le point A décrit un cercle.

Si à l'instant 0, l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ a la valeur φ, il a, à l'instant t, la valeur $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = \omega t + \varphi$.

La représentation de Fresnel correspond à une fonction sinusoïdale écrite sous la forme y = $a\sin(\omega t + \varphi)$ dans laquelle a et φ sont positifs et les angles exprimés en radians. Si l'expression de y est différente, il faut, par un changement de variables, se ramener à cette forme.

La projection de ce vecteur sur l'axe $(O, \vec{j})$ est, à l'instant t :

$$y = a\sin(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a\sin(\omega t + \varphi)$$

Ainsi, le mouvement de la projection sur l'axe $(O, \vec{j})$ de l'extrémité du vecteur tournant est un mouvement sinusoïdal, d'amplitude égale au module du vecteur, proportionnelle à a.

La construction de Fresnel

Lorsque deux causes (représentées par deux fonctions sinusoïdales $y_1 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = a_2\sin(\omega t + \varphi_2)$) agissent simultanément sur un système, la fonction résultante y décrivant le mouvement résultant est égale, à chaque instant à la somme des fonctions y_1 et y_2.

Aux deux fonctions y_1. et y_2 sont associés des vecteurs tournants $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$.

Leurs projections sur l'axe $(O, \vec{j})$ sont les fonctions sinusoïdales y_1 et y_2 dont nous cherchons la somme.

Nous venons de composer deux mouvements rectilignes sinusoïdaux de même centre, de même période, et dont les trajectoires sont portées par une même droite. On peut envisager le cas où les deux trajectoires sont portés par deux axes distincts, on peut construire sur l'oscilloscope des ellipses et des courbes de Lissajous.

Soit le vecteur $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$. Comme le parallélogramme OA_1AA_2 est de diagonale $[OA]$ de longueur constante, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ tourne aussi avec la même vitesse angulaire, en gardant un module a constant.

La projection de ce vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur l'axe $(O, \vec{j})$ est la fonction sinusoïdale $y = a\sin(\omega t + \varphi)$ recherchée.

Les circuits LRC

Le problème est de déterminer une relation entre u et i dans un circuit électrique

Lorsque le circuit comprend :
- uniquement une résistance la loi d'Ohm donne $u = Ri$.
- uniquement un condensateur de capacité C, la relation devient $i = C\frac{\mathrm{d}u}{dt}$

   (on dit que i est en quadrature avance sur u)
- uniquement une bobine d'inductance L, on a $u = L\frac{\mathrm{d}i}{dt}$

   (u est en quadrature avance sur i)

On appelle intensité efficace I d'un courant alternatif, l'intensité I d'un courant continu, qui, traversant un conducteur ohmique de résistance R pendant la même durée, y produirait le même dégagement de chaleur.
Si la période du courant alternatif est T, on a $\int_0^T R(i(t))^2\,\mathrm{d}t = \int_0^T R.I^2\,\mathrm{d}t$, exprimée en joules.

On montre alors que $I^2 = \int_0^T (i(t))^2\,\mathrm{d}t$ et I^2 est la valeur moyenne de i^2 sur une période.
On a dans ce cas, $i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi)$

Pour un courant alternatif, la quadrature avance correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ pour le vecteur de Fresnel correspondant soit à une multiplication de ce vecteur par le complexe $i = \sqrt{-1}$. Pour ne pas confondre avec le symbole des intensités, on notera comme les physiciens j ce nombre. On note, de plus, par des majuscules soulignées les autres grandeurs complexes.

A $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$ et $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)$ (avec la notation $\hat{U} = U\sqrt{2}$ et $\hat{I} = I\sqrt{2}$ pour les valeurs maximales et U et I les valeurs efficaces), on associe les nombres complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$ définies par leur expression (dite polaire) $[\hat{U};\varphi_u]$ et $[\hat{I};\varphi_i]$ donnant module et argument du vecteur de Fresnel correspondant.

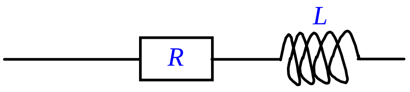
Dans ce cas, $i = C\frac{du}{dt}$ s'écrit $\underline{I} = jC\omega\underline{U}$ ou $\underline{U} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I} = -j\frac{1}{C\omega}\underline{I}$

$u = L\frac{di}{dt}$ s'écrit $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$

On peut alors généraliser la loi d'Ohm aux courants sinusoïdaux sous la forme $\underline{U} = \underline{Z}.\underline{I}$ où $\underline{Z}$ est l'impédance complexe, laquelle vérifie les mêmes lois que dans le cas continu : en série $\underline{Z} = \sum \underline{Z}_i$ et en parallèle $\frac{1}{\underline{Z}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_i}$

(Pour une résistance, $\underline{Z} = R$, un condensateur $\underline{Z} = -j\frac{1}{C\omega}$, une bobine $\underline{Z} = jL\omega$)

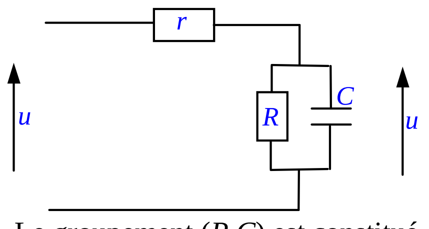
Exemple 1 :



$u = 250$ V, $R = 100\ \Omega$, $L\omega = 75$ Hz
$f = 50$ Hz (fréquence des tensions en Europe Continentale)

Pour la résistance seule $\underline{U} = R\underline{I} = 100\underline{I}$
Pour la bobine seule $\underline{U} = jL\omega\underline{I} = 75j\underline{I}$
Pour le circuit complet, puisque les éléments sont en série, $\underline{U} = (R + jL\omega)\underline{I} = (100 + 75j)\underline{I}$.

Exemple 2 :



- Le groupement (R,C) est constitué de R et de C en parallèle, son impédance est $\frac{1}{\underline{Z}_P} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{jC\omega}}$ soit $\underline{Z}_P = \frac{R}{1 + jCR\omega}$

- Le dipôle complet a pour impédance $\underline{Z} = r + \underline{Z}_P + r + \frac{R}{1 + jCR\omega}$

soit $\underline{Z} \approx 534 - 464j$

Ainsi, si on applique la tension $u = 120\sqrt{2}\sin(100\pi t)$, on peut déterminer le courant i correspondant :

$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ avec $\underline{U} = [120;0]$

donc $I = \frac{120}{\sqrt{534^2 + 464^2}} \approx 0{,}169$ A et $\arg\underline{I} = \arg\underline{U} - \arg\underline{Z} = \arg\underline{Z} \approx -\arctan\left(\frac{464}{534}\right)$

$\approx -0{,}715$ rad

et $i = I\sqrt{2}\sin(100\pi t - \varphi) \approx 0{,}169\sqrt{2}\sin(100\pi t - 0{,}715)$

Les diagrammes de Bode

Pour les systèmes linéaires, les diagrammes de Bode permettent de connaître la réponse du système à une excitation sinusoïdale, à différentes fréquences.

- On impose en entrée du système à étudier une tension sinusoïdale, à une fréquence fixée.
- On attend un certain temps que le régime soit stabilisé. On appelle cela le régime sinusoïdal établi.

Tension d'entrée $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t)$

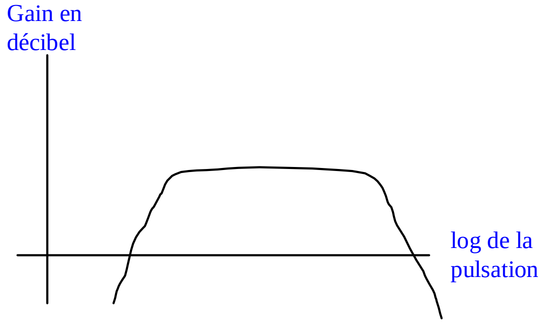
Tension de sortie $u'(t) = U'\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$

avec φ pulsation et φ déphasage entrée-sortie

Le quotient $\frac{U'}{U}$ est le gain en amplitude

On relève le gain en amplitude et le déphasage du système pour plusieurs fréquences ou pulsations de la tension d'entrée.
Le résultat de ce type de mesure est un ensemble de deux graphes : gain-pulsation et déphasage-pulsation. On parle de diagramme de Bode lorsqu'on en fait une représentation en échelle logarithmique pour les pulsations.
La représentation courante en électronique est donnée sous forme de diagrammes de Bode, où l'on montre l'évolution du gain en décibels et du déphasage en fonction de la pulsation de travail, placée elle aussi en échelle logarithmique.

Exemple de diagramme de Bode en amplitude



Exemple de diagramme de Bode en phase

produit scalaire

Vecteur accélération à l'instant t.

C'est le vecteur $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$

Soit $\vec{t}$ un vecteur unitaire de la tangente en M à la trajectoire. On a, puisque la vitesse est tangente à la trajectoire, $\vec{v}$ qui peut s'écrire sous la forme $\vec{v} = v\vec{t}$

Donc $\vec{\Gamma} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{t} + v\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}$ où $\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}$ est orthogonal à $\vec{t}$.

On appelle accélération tangentielle le vecteur $\vec{\Gamma}_T = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{t}$ et accélération normale le vecteur $\vec{\Gamma}_N = v\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}$.

Avec ces notations, un mouvement sera dit uniforme si la norme $\|\vec{v}\|$ est constante, accéléré si elle est une fonction croissante du temps et retardé si la norme est une fonction décroissante du temps. Comme $\|\vec{v}\|$ varie comme $\|\vec{v}\|^2$, c'est-à-dire $\vec{v}^2 = \vec{v}.\vec{v}$ dont la dérivée est $2\vec{v}.\vec{\Gamma}$, on obtient les résultats suivants :

- le mouvement est uniforme pour $t\in[t_0;t_1]$ si $\vec{v}.\vec{\Gamma} = 0$ sur $[t_0;t_1]$
- le mouvement est accéléré pour $t\in[t_0;t_1]$ si $\vec{v}.\vec{\Gamma} > 0$ sur $[t_0;t_1]$
- le mouvement est retardé pour $t\in[t_0;t_1]$ si $\vec{v}.\vec{\Gamma} < 0$ sur $[t_0;t_1]$

Définition du travail

Lorsqu'une force est constante et dans le cas d'un déplacement rectiligne, le travail (qui représente le transfert d'énergie associé au déplacement) sur un trajet MM' est défini par $W = \vec{F}.\overrightarrow{MM'} = \|\vec{F}\|.MM'.\cos(\vec{F},\overrightarrow{MM'})$

Si $(\vec{F},\overrightarrow{MM'}) < \frac{\pi}{2}$, le travail est positif ; on dit qu'il est moteur.

Si $(\vec{F},\overrightarrow{MM'}) > \frac{\pi}{2}$, le travail est négatif ; on dit qu'il est résistant.

Lorsque la force est perpendiculaire au mouvement ($(\vec{F},\overrightarrow{MM'}) = \frac{\pi}{2}$), le travail est alors nul. Par exemple, la Lune a un mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Elle ne consomme pas d'énergie puisqu'elle se déplace à vitesse constante. Le travail de la force de gravitation est donc nul puisqu'elle est constamment perpendiculaire au mouvement.

Principe des forces conservatives

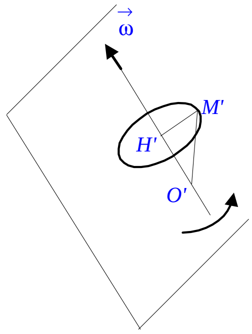
Une force est dite conservative lorsque le travail de cette force ne dépend pas du trajet suivi entre deux points M et M'.
Les forces centrales (comme la force de gravitation) vérifient cette propriété.
DEFINITION DES ENERGIES ?
Les forces de frottement ne sont pas des forces conservatives. Plus le trajet sera long, plus il faudra d'énergie pour effectuer le déplacement. Si l'on effectue un trajet en boucle, le travail de cette force ne sera pas nul.

produit vectoriel

Soit $\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\alpha)$ où α est l'angle dont il faut faire tourner, en minimisant son "effort" le premier vecteur du produit vectoriel pour l'aligner sur le second.

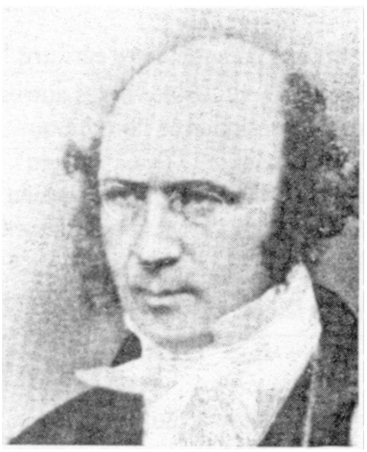
Considérons un référentiel d'inertie R, centré en O par rapport auquel tourne, autour d'un axe Δ, un référentiel indéformable R' centré en O'.

Tous les points de R' tournent autour de Δ avec la même vitesse angulaire ω mais avec une vitesse $\vec{V}_{M'}$ d'autant plus grande que le point M' considéré est distant de Δ.
Si on note H' le projeté orthogonal de M' sur Δ, $H'M'$ est la distance de M' à l'axe et on a $V_{M'} = \omega.\ H'M' = \omega r'\sin\alpha$ où $r' = O'M'$ et $\alpha = (\Delta,(O'M'))$
On est donc conduit à écrire la vitesse $\vec{V}_{M'}$, sous la forme $\vec{V}_{M'} = \vec{\omega}\wedge\vec{r'}$ où



$\vec{\omega}$ est le vecteur de rotation instantanée. Il est porté par Δ, sa norme est ω, la vitesse angulaire, et sa direction est celle que prendrait un tire-bouchon si on le faisait tourner dans le sens de rotation de R'.

Donc, en plus de ω et v, $\vec{\omega}$ et $\vec{v}$ donnent la direction de l'axe autour duquel tourne le référentiel et le sens de la rotation instantanée.




1843 ÉIRE 1943
1/2 P
ROWAN HAMILTON