

Historique

Les courbes et surfaces de Bézier datent de 1960. Elles sont actuellement utilisées dans de très nombreuses applications :

- commandes de machines numériques
- programmes de dessin vectoriel (segments courbes)
- polices True-type
- morphing : déformation d'images

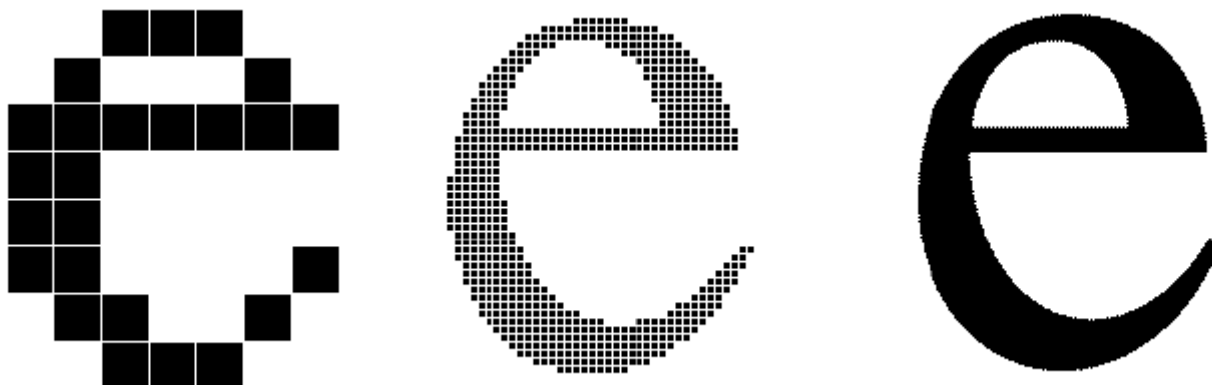
Au début des années 60, les machines numériques ne savaient usiner de façon précise que des courbes simples comme des paraboles ou des ellipses. Une seconde catégorie d'objets, au contraire, offrait une forme à priori peu précise, déterminée expérimentalement. Les hélices d'avions, les coques de bateaux et les carrosseries de voitures étaient tracées à main levée, sans que l'on puisse décrire leurs formes par une formule mathématique.

Pierre Bézier, ingénieur chez Renault, ayant conçu en 1945 les machines transferts pour la fabrication des 4CV et en 1958 une machine à Commande Numérique, chercha comment traduire mathématiquement une courbe, puis une surface, dessinées à main levée. Il lui fallait concevoir un système capable de gérer des courbes gauches, c'est-à-dire de manipuler des surfaces en 3D, d'où la nécessité de définir un modèle mathématique qui ne soit pas limité à des courbes en deux dimensions.

L'aventure de Pierre Bézier aurait pu s'arrêter là. Mais un groupe de développeurs liés à Apple créa un langage adapté à la future imprimante laser conçue pour le Mac. Il s'agissait de trouver un moyen de définir mathématiquement une courbe, comme le tracé d'un caractère, avant de l'envoyer à l'imprimante. L'un de ces développeurs connaissait le travail du français. Tout naturellement, il choisit les courbes de Bézier comme base du langage Post-Script et fonda la société Adobe. Microsoft adopta à son tour les polices true-type à partir de Windows 3.1. Ces polices utilisent les courbes de Bézier pour définir les caractères aux formes arrondies.

Dans les années 1980, quand les ordinateurs personnels commençaient tout juste à se répandre, l'ordinateur avait en mémoire un dessin de chacune des 26 lettres de l'alphabet (sans compter les lettres accentuées).

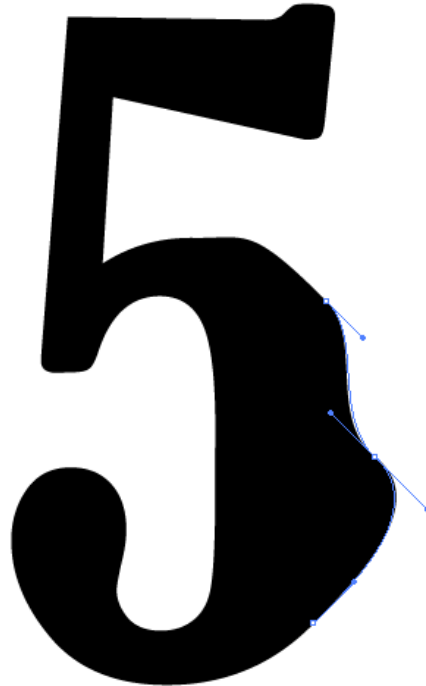
Une lettre était stockée sous la forme d'une grille 8×8 dans laquelle chaque case était allumée ou éteinte (noire ou blanche, ce qui en mémoire correspond au symbole 0 ou 1). Par exemple, le "e" pouvait ressembler au dessin de gauche de la figure ci-dessous.



Cette méthode avait de nombreux inconvénients. En particulier, si l'on voulait grossir le texte à l'écran, l'ordinateur ne pouvait que grossir la grille, et on voyait apparaître les gros carrés qui définissaient la lettre, exactement comme sur le dessin ci-dessus. En comparaison, avec un ordinateur actuel, on peut zoomer à "l'infini" sans voir apparaître de gros carrés ; pourtant, l'écran lui-même est toujours une grille de pixels (ici, 1024 sur 768) : c'est donc que le "e" sur lequel on a zoomé n'est pas obtenu à partir d'une lettre de taille normale en effectuant un pur agrandissement (une homothétie !), sans quoi les carrés apparaîtraient assez vite. Il semble que les lettres ne soient plus définies au moyen d'une grille, mais à

l'aide de courbes lisses, et que l'ordinateur recalcule des détails supplémentaires à chaque nouvel agrandissement. Quelles sont les courbes utilisées pour produire ces lettres, et comment sont-elles définies ?

Capture d'écran de Adobe Illustrator



Sources :

- Lycée Paul Valéry de Sète
- La Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) et la Société Mathématique de France (SMF) sur emath.fr
- Lycée de l'Europe, Lille

Courbes de Bézier

Les courbes de Bézier sont des courbes composées de barycentres de points appelés points de contrôle pondérés par des coefficients qui sont des fonctions particulières d'un paramètre réel t . Elles sont très utiles en graphisme et interviennent par exemple dans la définition des polices de caractères sur ordinateur.

I) Courbes de Bézier linéaires

Les courbes de Bézier linéaires sont de degré 1 en t et dépendent de deux points de contrôle A_0 et A_1 , elles sont définies par les points :

$$M = \text{bar}\{(A; 1-t), (B; t)\} \text{ avec } t \in [0; 1]$$

Prouver que l'ensemble des points M pour $t \in [0; 1]$ est le segment $[A_0A_1]$.

II) Courbes de Bézier quadratiques

1) Le principe

On se donne trois points quelconques A_0 , A_1 et A_2 dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; 1]$, on définit les points B_0 , B_1 et M comme barycentres respectifs des systèmes de points pondérés :

$$\{(A_0, 1-t); (A_1, t)\}, \{(A_1, 1-t); (A_2, t)\} \text{ et } \{(B_0, 1-t); (B_1, t)\}.$$

La courbe de Bézier est la courbe (\mathcal{C}) , lieu des points M quand t décrit l'intervalle $[0; 1]$.

2) On suppose que A_0 , A_1 et A_2 ne sont pas alignés.

a) Montrer que

$$\vec{OM} = (1-t)^2 \vec{OA}_0 + 2t(1-t) \vec{OA}_1 + t^2 \vec{OA}_2 \quad (\text{E})$$

b) Prouver que l'ensemble (\mathcal{C}) des points M pour $t \in [0; 1]$ est une courbe contenant A_0 et A_2 , ne passant pas par A_1 et contenue dans le triangle $A_0A_1A_2$.

ADMIS

La courbe de Bézier avec trois points de contrôle A_0 , A_1 et A_2 est une courbe d'extrémité A_0 et A_2 et dont les droites (A_1A_0) , (A_1A_2) et (B_0B_1) sont respectivement des tangentes aux points A_0 , A_2 et M .

3) Le but de cette partie est de répondre à la question suivante : peut-on trouver des positions de A_0 , A_1 et A_2 (points à coordonnées entières), telles que la courbe (\mathcal{C}) coïncide avec la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 2]$ par $f(x) = x^2$?

a) Quelles doivent-êre les coordonnées de A_0 et de A_2 ?

b) À l'aide de la figure, conjecturer sur les coordonnées de A_1 .

c) En utilisant la relation (E), exprimer l'abscisse x et l'ordonnée y du point M en fonction de t et des coordonnées de $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$ et $A_2(x_2, y_2)$.

d) Vérifier votre conjecture, c'est-à-dire, montrer que les coordonnées de M vérifient bien $y = x^2$ pour les point A_0 , A_1 et A_2 de votre conjecture.

Retrouver que A_1 est à l'intersection des tangentes à la courbe en A_0 et A_2 .

e) Vérifier que ce sont les seuls points possibles (*i.e.* aurait-on pu trouver un autre point A_1 ?) :

- Exprimer x et y en fonction de t , x_1 et y_1 .

- Exprimer $y - x^2$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel (Maple, derive, maxima).

On obtient un polynôme de la variable t que l'on notera $P(t)$.

- Quelles conditions nécessaires et suffisantes doit vérifier $P(t)$ pour tout t dans $[0, 1]$ pour que l'on ait $y = x^2$?

- En déduire les coordonnées de A_1 (on pourra utiliser un logiciel de calcul formel si nécessaire) et ainsi son unicité.

Terminale S : Barycentre et Morphing

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -5 - 3i, b = -1 - 2i, c = -1 + i$ et $d = -4 + 2i$ ainsi que les points A', B', C' et D' d'affixes respectives $a' = 2 - i, b' = 4 - 3i, c' = 6$ et $d' = 3 + 4i$.

Un exemple de "Morphing"

Le but de cette première partie est de construire un procédé permettant de déformer continûment le quadrilatère $ABCD$ en le quadrilatère $A'B'C'D'$.

- 1) a) Construire les quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$ en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.
b) Soit k un réel compris entre 0 et 1. Construire les points A_k, B_k, C_k et D_k barycentres respectifs des points pondérés $\{(A, 1 - k); (A', k)\}, \{(B, 1 - k); (B', k)\}, \{(C, 1 - k); (C', k)\}$ et $\{(D, 1 - k); (D', k)\}$.
c) Construire le quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$. Que remarquez-vous lorsque k varie de 0 à 1 ? En particulier, que devient le quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$ lorsque $k = 0$? Lorsque $k = 1$?
- 2) En utilisant la trace, faire apparaître quelques positions du quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$.

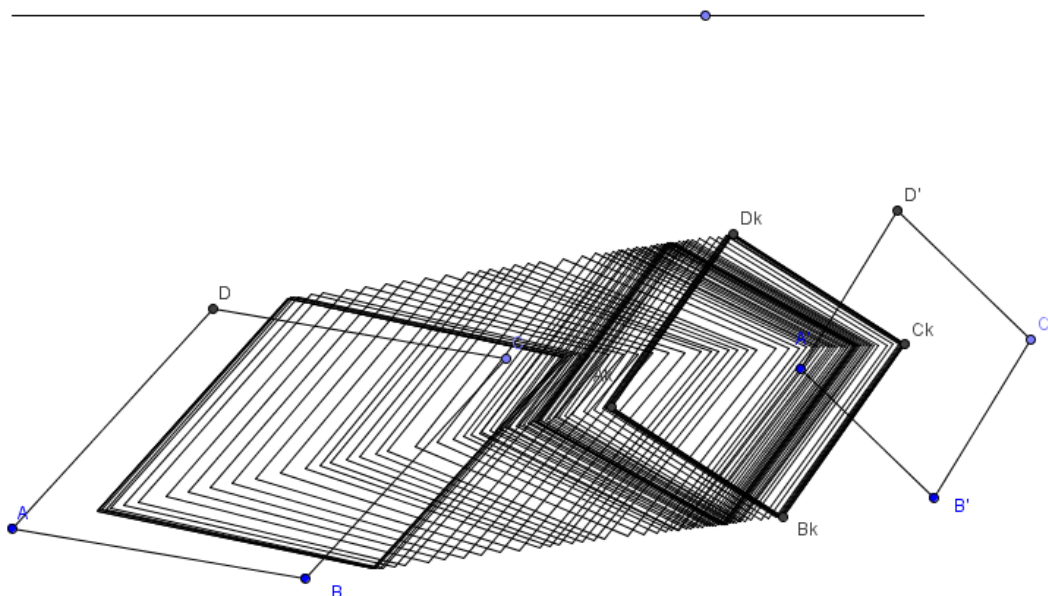
Une propriété du "Morphing"

On se place maintenant dans la situation où $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont des parallélogrammes. Par rapport à la figure précédente, on ne change que les valeurs de d et d' en posant $d = -5$ et $d' = 4 + 2i$.

- 1) a) Adapter la figure précédente à ce nouvel énoncé.
Vérifier que $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont des parallélogrammes.
b) Quelle semble être la nature du quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$?
- 2) Démonstration
a) Exprimer en fonction de k les affixes respectives a_k, b_k, c_k et d_k des points A_k, B_k, C_k et D_k .
b) Démontrer la conjecture émise dans la question 1) b).
- 3) Généralisation
On suppose que $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont deux parallélogrammes. Les points A_k, B_k, C_k et D_k sont définis de la même manière que précédemment.
Prouver que le quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$ est un parallélogramme.

En revanche ...

Dans la partie précédente, on a montré que le procédé de déformation continue mis en œuvre dans cette activité conserve le parallélisme. A l'aide d'un contre-exemple, montrer que ce procédé ne conserve en général pas l'orthogonalité. On pourra partir de deux losanges $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ou d'un losange et ...



Première S : Barycentre et Morphing

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(-5;-3), (-1;-2), (-1;1)$ et $(-4;2)$ ainsi que les points A', B', C' et D' de coordonnées respectives $(2;1), (4;3), (6;0)$ et $(3;4)$.

Un exemple de "Morphing"

Le but de cette première partie est de construire un procédé permettant de déformer continûment le quadrilatère $ABCD$ en le quadrilatère $A'B'C'D'$.

- 1) a) Construire les quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$ en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.
b) Soit k un réel compris entre 0 et 1. Construire les points A_k, B_k, C_k et D_k barycentres respectifs des points pondérés $\{(A, 1-k); (A', k)\}, \{(B, 1-k); (B', k)\}, \{(C, 1-k); (C', k)\}$ et $\{(D, 1-k); (D', k)\}$.
c) Construire le quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$. Que remarquez-vous lorsque k varie de 0 à 1 ? En particulier, que devient le quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$ lorsque $k = 0$? Lorsque $k = 1$?
- 2) En utilisant la trace, faire apparaître quelques positions du quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$.

Une propriété du "Morphing"

On se place maintenant dans la situation où $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont des parallélogrammes. Par rapport à la figure précédente, on ne change que les coordonnées de D et D' en $(-5;0)$ et $(4;2)$.

- 1) a) Adapter la figure précédente à ce nouvel énoncé.
Vérifier que $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont des parallélogrammes.
b) Quelle semble être la nature du quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$?
- 2) Démonstration
a) Exprimer en fonction de k les affixes respectives a_k, b_k, c_k et d_k des points A_k, B_k, C_k et D_k .
b) Démontrer la conjecture émise dans la question 1) b).
- 3) Généralisation
On suppose que $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont deux parallélogrammes. Les points A_k, B_k, C_k et D_k sont définis de la même manière que précédemment.
Prouver que le quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$ est un parallélogramme.

En revanche ...

Dans la partie précédente, on a montré que le procédé de déformation continue mis en œuvre dans cette activité conserve le parallélisme. A l'aide d'un contre-exemple, montrer que ce procédé ne conserve en général pas l'orthogonalité. On pourra partir de deux losanges $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ou d'un losange et ...

