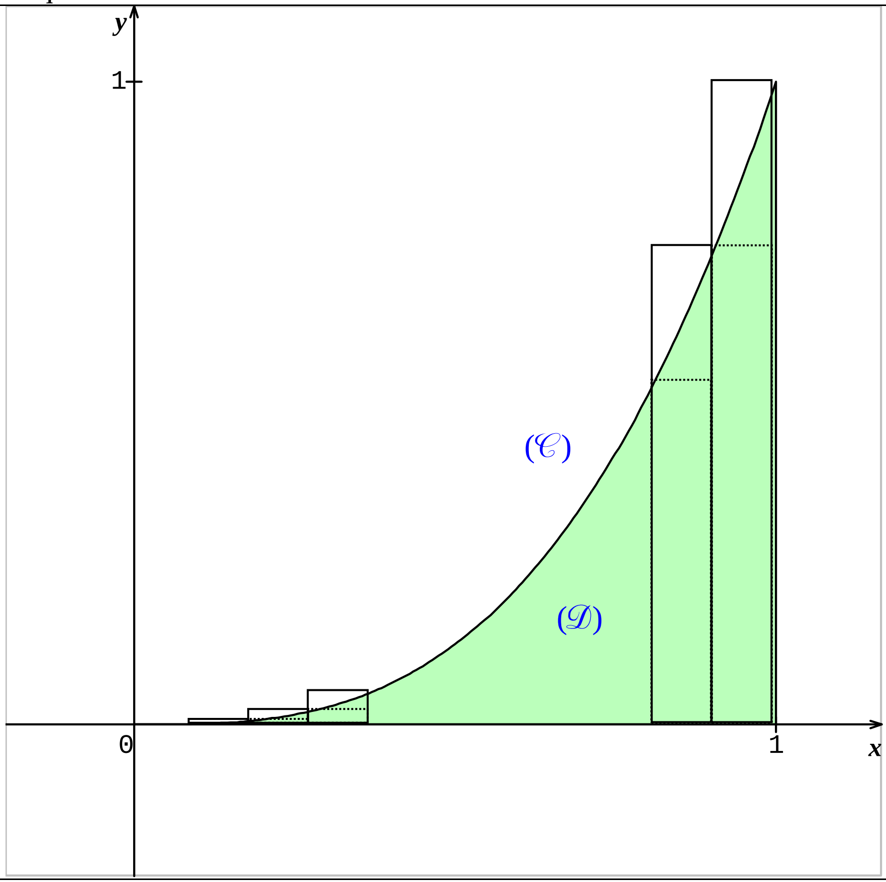
Calculs approchés d'intégrales par la méthode des rectangles

$(\mathscr{C})$ est la courbe représentant la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^3$ dans un repère orthonormal. $\mathscr{S}$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine $(\mathscr{D})$ délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.



On subdivise l'intervalle $[0;1]$ à l'aide des nombres $a_i = \dfrac{i}{n}$ avec $0 \leqslant i \leqslant n$.

Sur $[a_i;a_{i+1}]$, avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on construit le rectangle de hauteur $f(a_i)$ et le rectangle de hauteur $f(a_{i+1})$.

On note $\mathscr{A}_n$ la somme des aires des rectangles contenus dans $(\mathscr{D})$ et $\mathscr{B}_n$ la somme des aires des rectangles qui contiennent $(\mathscr{D})$.

Vérifier que pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$, $\mathscr{A}_n \leqslant \mathscr{S} \leqslant \mathscr{B}_n$, avec $\mathscr{A}_n = \dfrac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3)$ et $\mathscr{B}_n = \dfrac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \dots + n^3)$.

$\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{B}_n$ sont appelées les *sommes de Riemann* de la fonction f sur $[0;1]$ et sont respectivement des valeurs approchées par défaut et par excès de $\mathscr{S}$.

Partie A

Algorithme pour déterminer une valeur approchée de $\mathscr{S}$ par $\mathscr{A}_n$:

Entrer l'ordre de la subdivision : n
Abscisse du premier point : $x \leftarrow 0$
Initialisation de la somme : $S \leftarrow 0$
Boucle de calcul : Pour $k = 0$ à $n-1$ faire
début

$$S \leftarrow S + x^3 \times \frac{1}{n}$$

$$x \leftarrow x + \frac{1}{n}$$

fin
Afficher : S

1) Traduire cet algorithme dans le langage employé par votre calculatrice. Créer également un programme permettant de calculer $\mathscr{B}_n$.
Utiliser ces programmes pour déterminer une valeur approchée de $\mathscr{S}$ à 10^{-3} près.

2) Reprendre l'algorithme proposé pour construire le programme permettant :

- de rechercher la première valeur de n telle que la différence relative entre les deux sommes $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{A}_{n+1}$ soit inférieure à 10^{-3}, c'est-à-dire telle que $\left|\dfrac{\mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n}{\mathcal{A}_n}\right| \leqslant 10^{-3}$.
- d'afficher la valeur de $\mathcal{S}$ obtenue dans ce cas.

Partie B

Détermination de $\mathcal{S}$.

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

En déduire les expressions de $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{B}_n$ en fonction de n.

2) Démontrer que les suites $(\mathcal{A}_n)_{n \geqslant 1}$ et $(\mathcal{B}_n)_{n \geqslant 1}$ sont adjacentes.

3) Déterminer la valeur de $\mathcal{S}$.