

L'urne au contenu caché

Antoine propose un jeu à ses copains : "J'ai placé neuf boules dans une urne dont les parois sont opaques. Ces neuf boules ne diffèrent que par la couleur : elles sont soit rouges, soit noires. Qui peut trouver la composition de mon urne ?"

- "Tu veux dire qu'il faut trouver, par exemple, le nombre de boules rouges ?" commente Nicolas.
- "Exactement !" confirme Antoine.
- "Tu nous laisses, bien sûr, tirer des boules dans ton urne !" précise alors Sophie, intriguée.
- "Je vous autorise à effectuer le tirage, au hasard, d'une boule dans mon urne. Vous devez remettre ensuite cette boule à sa place" répond Antoine.
- "Et tu nous permets d'effectuer combien de tirages de cette sorte ?" intervient alors Alexis.
- "Autant que vous voudrez !" répond Antoine sans hésitation.
- "Alors d'accord !" répondent les copains.

1) Laure a effectué 32 tirages dans l'urne d'Antoine. Elle est un peu perplexe parce qu'elle a obtenu 16 fois une boule rouge.

"C'est curieux ce que j'ai obtenu ! Antoine ne peut avoir mis autant de boules rouges que de boules noires dans son urne !" pense-t-elle.

Calculer la fréquence d'apparition d'une boule rouge dans l'échantillon de Laure.

Expliquer une raison pour laquelle Laure a obtenu autant de boules rouges que de boules noires.

Laure n'a pas forcément tiré toutes les boules, certaines n'ont pas été utilisées. Il est possible que des boules soient restées au fond de l'urne. On ne peut pas expliquer car c'est une question de probabilité.

Laure a obtenu autant de boules rouges que de boules noires car le hasard peut donner n'importe quel résultat. Si elle recommence son tirage, elle aura sûrement un résultat différent.

Laure a obtenu autant de boules rouges que de boules noires car la fréquence d'apparition d'une boule rouge est $0,5$, soit $\frac{1}{2}$ donc la fréquence d'apparition d'une boule noire est aussi $0,5$, soit $\frac{1}{2}$.

Quelles sont les seules répartitions possibles de boules rouges et de boules noires dans l'urne d'Antoine ?

Quelles sont alors les proportions de boules rouges possibles ?

Il peut y avoir :

- a - 1 boule rouge et 8 boules noires $\rightarrow \frac{1}{9}$ de boules rouges
- b - 2 boules rouges et 7 boules noires $\rightarrow \frac{2}{9}$
- c - 3 boules rouges et 6 boules noires $\rightarrow \frac{3}{9}$
- d - 4 boules rouges et 5 boules noires $\rightarrow \frac{4}{9}$
- e - 5 boules rouges et 4 boules noires $\rightarrow \frac{5}{9}$
- f - 6 boules rouges et 3 boules noires $\rightarrow \frac{6}{9}$
- g - 7 boules rouges et 2 boules noires $\rightarrow \frac{7}{9}$
- h - 8 boules rouges et 1 boule noire $\rightarrow \frac{8}{9}$

Mon choix est de ces seules répartitions possibles sont :
choisi environ la 1^{er} cas, 4 boules rouges et 5 boules noires sur 9 boules
moitié de 9. 2^{es} cas, 4^{es} boules noires et 5 boules rouges sur 9 boules

2) Alexis et Sophie ont également effectué chacun 32 tirages. Alexis a obtenu 13 fois une boule rouge et Sophie a obtenu 17 fois une boule rouge.

Quelle fréquence d'apparition d'une boule rouge Alexis et Sophie ont-ils observée sur leurs échantillons respectifs ?

Pourquoi les résultats ne sont pas identiques entre les trois échantillons ?

Laure, Alexis et Sophie auraient-ils eu beaucoup de chances d'obtenir ces résultats si Antoine avait mis dans son urne une boule rouge et huit boules noires ? Pourquoi ?

2)	Alexis	$\frac{13}{32}$	Sophie	$\frac{17}{32}$
----	--------	-----------------	--------	-----------------

Car les tirages s'effectuent aléatoirement

Non car ils auraient tirés probablement moins de boules rouges

2) - Fréquence boules rouges : Alexis : 0,408
Sophie : 0,531

- Tout dépend du nombre de boules rouges tirées.

- Non, car le taux de probabilité d'obtenir une boule noire est supérieur (1/8).

Elles ne sont pas identiques car la couleur de la boule qui est retirée varie par le hasard. Non car la probabilité d'avoir une boule noire serait fortement augmentée.

3) Alexis et Sophie pensent que s'ils pouvaient créer des échantillons en supposant connue la répartition des boules rouges et des boules noires, ils pourraient conclure.

A l'aide du tableur, simuler trente-deux tirages dans une urne qui contient trois boules rouges et six boules noires. Expliquer votre méthode.

Notez la fréquence d'apparition d'une boule rouge lors de votre échantillon.

Répétez cette expérience de façon à obtenir 10 échantillons de 32 tirages.

A l'aide des fréquences obtenues, pouvez-vous conclure sur la répartition de l'urne.

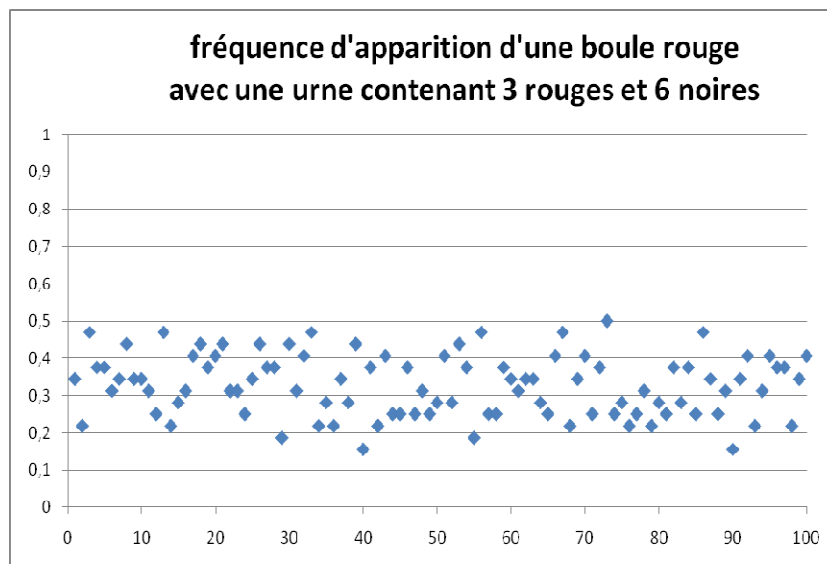
Expliquez votre démarche.

3) Tout d'abord dans la colonne A, nous demandons au tableur de choisir un nombre au hasard grâce à la formule = ENT(RANDBETWEEN(1;8)+1). Ensuite, dans la colonne B, nous demandons au tableur de nous signaler les boules rouges et les boules noires grâce à un code de Rouge = 1 et Noir = 0 et grâce à la formule = SI(A1=1;1;0).

Or, de notre échantillon, la fréquence est de 0,31 ($\frac{10}{32}$).

Non, nous ne pouvons pas conclure avec 10 échantillons de 32 tirages car cela reste du hasard et les tirages restent très variés.

4) Leur professeur leur fournit des graphiques qu'il a obtenus après avoir effectué des simulations avec son ordinateur.



Sophie observe le premier graphique et dit :

"Si Antoine avait mis trois boules rouges dans l'urne, nous aurions dû observer sur nos échantillons une fréquence d'apparition d'une boule rouge comprise entre 0,15 et 0,50. Ce n'est pas ce que j'ai observé sur mon échantillon, donc il n'est pas possible qu'Antoine ait mis trois boules rouges dans l'urne."

D'où viennent les nombres 0,15 et 0,50 mentionnés par Sophie ?

Peut-on être aussi catégorique que Sophie ? Expliquer votre raisonnement, en utilisant éventuellement vos simulations du 3).

4) Sur le graphique, sur l'axe des ordonnées, la valeur la plus basse est 0,15 et la plus haute est 0,50.

- Non, car c'est du hasard et il est toujours possible (même si c'est très improbable) de trouver une valeur en dessous de 0,15 et au dessus de 0,50.

4) 0,15 et 0,50 viennent des échantillons d'une fréquence d'apparition d'une boule rouge. Non nous ne pourrions pas être aussi catégorique que Sophie mais les valeurs sont tout de même proche comme notre simulation du 3 qui était comprise entre 0,22 et 0,38.

5) Quelle stratégie utiliseriez-vous pour tenter d'affiner votre réponse au problème du jeu d'Antoine ?

5) Il faudrait les tableaux de toute les répartitions possible et définir le milieu cela permettra d'affiner la réponse

5) Il faut faire le maximum de tirage pour avoir une meilleure précision sur la fréquence