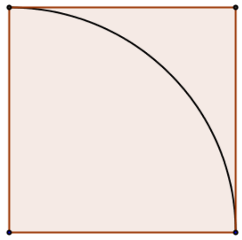
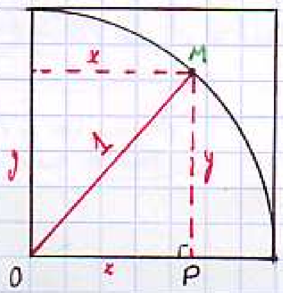
Devoir Seconde

π le dans la cible !



On considère le quart de cercle de centre O et de rayon 1 cm inscrit dans le carré de côté 1 cm et on lance une fléchette au hasard dans le carré.
Soit M le point à l'intérieur du carré correspondant à l'endroit où s'est plantée la fléchette. Soit $(x;y)$ les coordonnées du point M.
1) Donner une condition sur x et y pour que le point M soit à l'intérieur du cercle.



Le rayon du quart de cercle de centre O est 1 cm. Alors pour que M $(x;y)$ soit à l'intérieur de ce quart de cercle, OM doit être égale où inférieur (longueur de) au rayon ; 1 cm.

MOP est un triangle rectangle, et donc, d'après le théorème de Pythagore, $\underbrace{OP^2 + PM^2 = OM^2}$.

$OP = x$
$PM = y$ } Donc, $x^2 + y^2 = OM^2$. $OM \le 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \le 1^2$.

Donc, pour que M soit à l'intérieur de ce quart du cercle, comme $OM \le 1$, alors $x^2 + y^2 \le 1$.

2) En utilisant la touche random de la calculatrice, simuler le calcul de $x^2 + y^2$ avec x et y deux nombres aléatoires appartenant à $[0;1[$.
Noter, à chaque fois, si la fléchette est à l'intérieur du quart de cercle ou à l'extérieur.
En répétant 50 fois cette expérience, reproduire et compléter le tableau suivant :

Fléchette	A l'intérieur du quart de cercle	A l'extérieur du quart de cercle
Effectif		
Fréquence		

2) Parce que x et y sont accidentels à $[0;1[$,
donc x^2 = Ran#^{2}
y^2 = Ran#^{2}

Ran#^{2} + Ran#^{2}

Fléchette	A l'intérieur du quart de cercle	A l'extérieur du quart de cercle
Effectif	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 𝍸
Fréquence	$\frac{40}{50} = 0{,}8$	$\frac{10}{50} = 0{,}2$

3) Calculer l'aire du quart de disque de rayon 1 cm, notée A_1, et l'aire du carré, notée A_2.
On démontre que la "fréquence théorique" d'apparition de la fléchette dans le quart de cercle est $f = \frac{A_1}{A_2}$.

Quel nom porte cette fréquence théorique ? A quoi correspond-elle ?
Calculer cette fréquence théorique, comparer et commenter avec le résultat de la simulation.

- Quand on lance une fléchette au hasard dans le carré, l'aire du quart de cercle correspond à $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1} = \frac{\pi}{4}$ de l'aire total du carré. Comme le point où la fléchette s'est plantée est au hasard, il y aura la même probabilité pour elle se planter dans un point, partout. Comme le quart de cercle représente $\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de l'aire où la fléchette peut tomber, il y aura $\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de probabilité pour que la fléchette s'est plantée à l'intérieur du quart de cercle. Donc, la probabilité, ou "fréquence théorique" d'apparition de la fléchette dans le quart de cercle est $\frac{A_1}{A_2}$.

- Cette fréquence théorique est la probabilité $\underbrace{(p)}_{\text{d'apparition de la fléchette dans le quart de cercle}}$, c'est à dire la fréquence que on trouvera si on lance ∞ fléchettes.

- $f = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow p = \frac{\pi}{4}$

3) $\mathcal{A}$ cercle $= \pi R^2$
On veut l'aire du 1/4 de cercle
donc $\frac{\pi R^2}{4} = 0{,}78 \text{ cm}^2$

Aire du carré $\rightarrow c^2 = 1^2 = 1 \text{ cm}^2$

C'est la fluctuation d'échantillonage.
Elle correspond au demi cercle par rapport à la surface du carré.

4) Avec un niveau de confiance de 95%, donner un encadrement de *f* en utilisant les résultats du 2).

4 - Comme $p = 0,785$ et que $n = 50$, les hypothèses du théorème de l'intervalle de confiance sont vérifiées.
Dans 95% des cas, la fréquence se trouve dans l'intervalle $\left[0,785 - \frac{1}{\sqrt{50}} ; 0,785 + \frac{1}{\sqrt{50}}\right]$
c'est à dire $[0,785 - 0,14 ; 0,785 + 0,14]$
soit $[0,645 ; 0,925]$

5 - $\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{50}} ; \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{50}}\right]$

$[0,645 ; 0,925]$

L'encadrement de π est $[0,645 ; 0,925]$.

5) Avec un niveau de confiance de 95%, en déduire un encadrement de π.

*en utilisant les résultats du 2) (et 4)) *(dans tous les cas on a 5% de chance de se tromper)

$p \in [0,62 ; 0,90] \Rightarrow$ Comme $\pi = 4p$; $4p \in [2,47 ; 3,61]$

$\Leftrightarrow \pi \in [2,47 ; 3,61]$

et toujours, avec un fréquence f de fléchettes plantées à l'intérieur du quart de cercle et un nombre n de lancers :

$4p \in \left[4\left(f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) ; 4\left(f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \Leftrightarrow \pi \in \left[4f - \frac{4}{\sqrt{n}} ; 4f + \frac{4}{\sqrt{n}}\right]$

5) Avec un niveau de confiance de 95%, je donne un encadrement de π

$\left[\pi - \frac{1}{\sqrt{50}} ; \pi + \frac{1}{\sqrt{50}}\right]$

$[3 ; 3,28]$

$3 < \pi < 3,28$

5) Encadrement de π : (dans 95% des cas)

$$\left[\pi - \frac{1}{\sqrt{50}} \; ; \; \pi + \frac{1}{\sqrt{50}} \right]$$

$$[\; 3{,}00 \; ; \; 3{,}283 \;]$$

5) $$\left[p - \frac{1}{\sqrt{m}} \; ; \; p + \frac{1}{\sqrt{m}} \right]$$

$$\left[0{,}25 - \frac{1}{\sqrt{50}} \; ; \; 0{,}25 + \frac{1}{\sqrt{50}} \right]$$

On en deduit que π est compris entre $[0{,}10 \; ; \; 0{,}40]$

6) Combien de lancers faudrait-il simuler pour obtenir un encadrement de π (toujours avec un niveau de confiance de 95%) à 10^{-2} près ?

(Avec toujours 5% de chance de se tromper) : encadrement de π à 10^{-2} près, c'est à dire :

$$\pi \in \left[4f - \frac{4}{\sqrt{n}} \; ; \; 4f + \frac{4}{\sqrt{n}} \right], \text{ où}$$

$$4f + \frac{4}{\sqrt{n}} - \left(4f - \frac{4}{\sqrt{n}} \right) = 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{\sqrt{n}} = 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{0{,}01} = \sqrt{n} \Leftrightarrow (800)^2 = n$$

$$640000 = n$$

Il faudrait 640 000 lancer pour un encadrement de π de 10^{-2} près

$$\pi + \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\pi - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0{,}02$$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}02 \quad | \times \sqrt{n} \quad | : 0{,}02$$

$$\frac{2}{0{,}02} = \sqrt{n} \quad | \, (\;)^2$$

$$\left(\frac{2}{0{,}02} \right)^2 = n$$

$$n = 10\,000$$

On doit lancer 10 000 pour obtenir un ēcadrement de π de 10^{-2} prēs.

7) Une simulation avec le logiciel Algobox donne les effectifs suivants :

Fléchette	A l'intérieur du quart de cercle	A l'extérieur du quart de cercle
Effectif	156 843	43 157

grâce à l'algorithme suivant :

```
VARIABLES
    x EST_DU_TYPE NOMBRE
    y EST_DU_TYPE NOMBRE
    n EST_DU_TYPE NOMBRE
    i EST_DU_TYPE NOMBRE
    p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    n PREND_LA_VALEUR 0
    POUR i ALLANT_DE 1 A 200000
        DEBUT_POUR
            x PREND_LA_VALEUR random()
            y PREND_LA_VALEUR random()
            SI (x*x+y*y<=1) ALORS
                DEBUT_SI
                    n PREND_LA_VALEUR n+1
                FIN_SI
        FIN_POUR
    AFFICHER "Le nombre intérieur au cercle est :"
    AFFICHER n
    p PREND_LA_VALEUR 200000-n
    AFFICHER "Le nombre extérieur au cercle est : "
    AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

Donner la distribution des fréquences.
Donner un encadrement de π (toujours avec un niveau de confiance de 95%).

Fléchette	A l'intérieur du quart de cercle	A l'extérieur du quart de cercle
Effectif	156 843	43157
Fréquence	0,784	0,216

en utilisant résultats du 5) :

$$\pi \in \left[4f - \frac{4}{\sqrt{n}} ; 4f + \frac{4}{\sqrt{n}}\right]$$

où f est fréquence des fléchettes d'être tombées à l'intérieur du quart de cercle, et n le nombre de lancers

alors

$$\pi \in \left[4 \cdot 0{,}784 - \frac{4}{\sqrt{200000}} ; 4 \cdot 0{,}784 + \frac{4}{\sqrt{200000}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \pi \in [3{,}128 ; 3{,}146]$$

Fléchette	A l'intérieur du quart de cercle	A l'extérieur du quart de cercle
Effectif	156843	43 157
Fréquence	$\frac{156843}{200000} = 0{,}78$	$\frac{43157}{200000} = 0{,}22$

Encadrement de π : (dans 95 % des cas)

$$\left[\pi - \frac{1}{\sqrt{200000}} \; ; \; \pi + \frac{1}{\sqrt{200000}} \right]$$

$$[\; 3{,}139 \; ; \; 3{,}144 \;]$$

8) a) Expliquer le fonctionnement des lignes 9, 13, 15 et 20.
b) Modifier l'algorithme ci-contre afin qu'il réalise autant de simulations qu'un nombre qui sera entré par l'utilisateur. De plus, lorsque le point *M* obtenu est dans le quart de cercle, vous l'afficherez en bleu et lorsqu'il est en dehors du quart de cercle, vous l'afficherez en rouge. Joignez une capture d'écran.
c) Modifier de nouveau le programme ci-contre afin de déterminer le plus petit entier *i* de simulations nécessaires pour trouver une fréquence proche de π à 10^{-2} près.

8) b)

Dans ALGOBOX:

AlgoBox Test

```
    n PREND_LA_VALEUR 0
    POUR i ALLANT_DE 1 A r
      DEBUT_POUR
      x PREND_LA_VALEUR random()
      y PREND_LA_VALEUR random()
      SI (x*x+y*y<=1) ALORS
        DEBUT_SI
        n PREND_LA_VALEUR n+1
        FIN_SI
      FIN_POUR
    AFFICHER "Le nombre interieur au cercle est: "
    AFFICHER n
    p PREND_LA_VALEUR r-n
    AFFICHER "Le nombre exterieur au cercle est: "
    AFFICHER p
  FIN_ALGORITHME
```

Généré par AlgoBox

Résultats

```
***Algorithme lancé***
Le nombre interieur au cercle est: 78698
Le nombre exterieur au cercle est:  21302
***Algorithme terminé***
```

Lancer Algorithme

Mode pas à pas

Continuer

Raccourci clavier : Bas

Fermer

Dans Excel, avec VBScript:

```
Sub Devoir2()
Dim x As Double
Dim y As Double
Dim n As Long
Dim i As Long
Dim p As Long

p = InputBox("How many simulations?")

For i = 1 To p
x = Math.Rnd
y = Math.Rnd
If x ^ 2 + y ^ 2 <= 1 Then
n = n + 1
End If
Next

Range("A1").Value = "A l'intérieur du quart de circle"
Range("B1").Value = n
Range("B1").Font.Color = RGB(255, 0, 0)
Range("A2").Value = "A l'extérieur du quart de circle"
Range("B2").Value = p - n
Range("B2").Font.Color = RGB(0, 0, 255)

End Sub
```

Resultat:

	A	B
1	A l'intérieur du quart de circle	235262
2	A l'extérieur du quart de circle	64738
3		