On se donne deux réels positifs de somme fixée S dont on recherche le maximum du produit $P = ab$.

De nombreuses méthodes sont connues pour résoudre ce problème.
En voici deux :

a et b sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$

de solutions réelles $X = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$ qui existent (en étant éventuellement confondues) pour $\frac{S^2}{4} - P \geqslant 0$ soit $P \leqslant \frac{S^2}{4}$.

La valeur de P est alors maximale pour $P = \frac{S^2}{4}$ qui est atteinte pour $a = b = \frac{S}{2}$.

Une autre méthode propose une réécriture du produit ab.

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Comme $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geqslant 0$, le maximum de ab est $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ qui est atteint pour $a = b = \frac{S}{2}$.

On va remarquer que l'on retrouve ce problème dans le cadre de la recherche des rectangles d'aire maximale se donnant un périmètre fixé, tout comme la recherche des triangles d'aire maximale connaissant le périmètre fixe mais aussi la recherche du volume maximal des parallélépipèdes rectangles sachant que la somme des arêtes est fixée, …

Que se passe-t-il lorsque le problème est présenté avec la recherche du maximum du produit de trois variables (qui peut-être envisagé à plus de 3 variables) ?
Voici deux démonstrations qui ont donné lieu à des discussions à l'Institut de France au début du XXème siècle (mais dont je ne retrouve plus trace) :

Version algébrique :
… De même pour la recherche du maximum d'un produit lorsque l'on connaît la somme (constante). Le produit de plusieurs facteurs sont la somme est constante, est maximal, lorsque ces facteurs sont égaux.

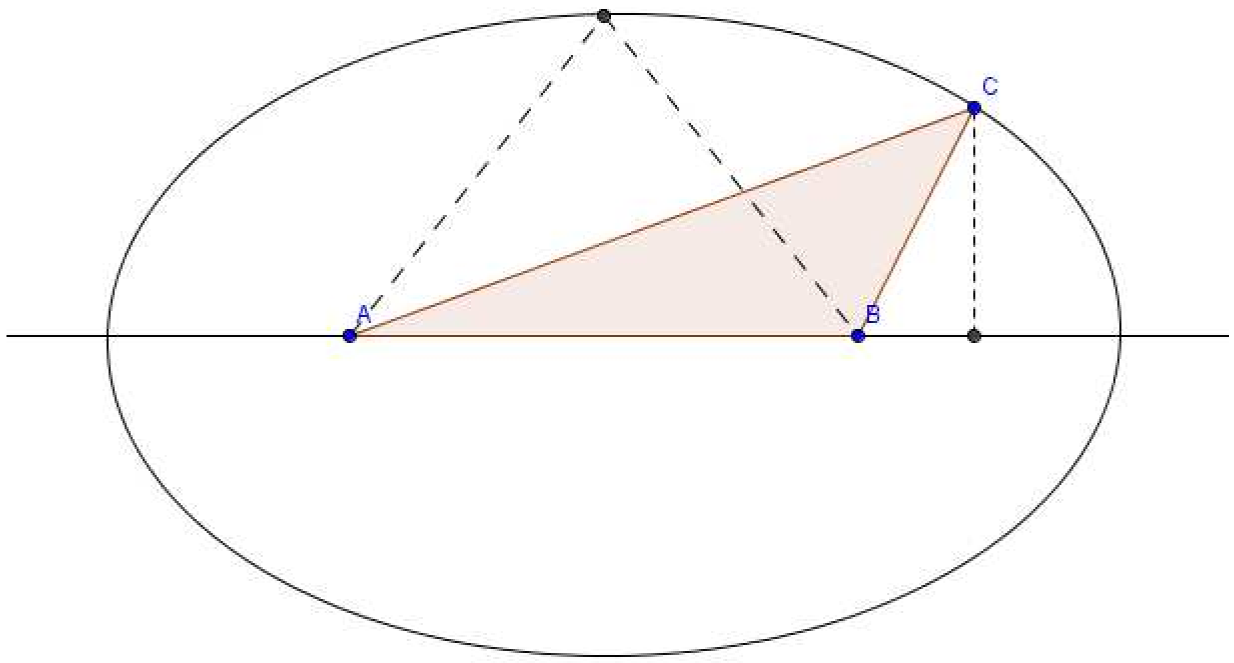
$x + y + z + t + \ldots = a$ dont il s'agit de recherche le produit maximal $xyzt\ldots$

Si on écrit

$x + y = a - y - t - \ldots$

Le deuxième membre est constant pour x et y, le produit sera maximal pour $x = y$.
On trouverait de même pour $y = z$, $z = t$, …
Et tous les nombres sont égaux.

Version géométrique
L'activité suivante dans le stage présente le problème à trois variables comme équivalent à recherche le maximum de l'aire des triangles de périmètres constants (par la formule de Héron d'Alexandrie).
Considérons le triangle ABC tel que $AB + BC + CA = S$, S fixée.
Fixons AB. on a donc $AC + CB = S - AB$ fixée et C parcourt l'ellipse de foyers A et B de distance à l'axe des foyers (permettant de calculer l'aire de ce triangle) le plus grande lorsque C est sur la médiatrice de $[AB]$. Dans ce cas, le triangle ABC est isocèle en C.



Pour que l'aire soit maximale, il faut que le triangle soit isocèle, quel que soit le sommet, donc le triangle doit être équilatéral.