Devoir Seconde

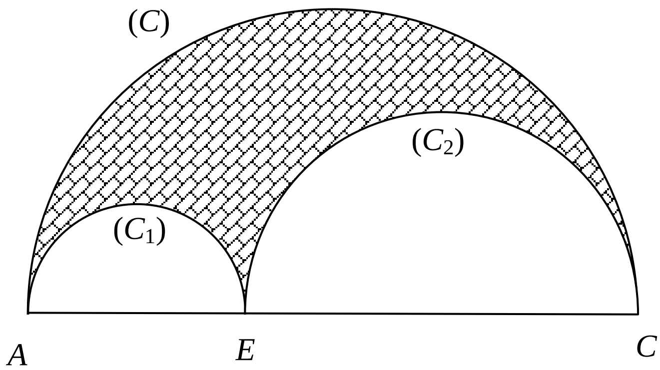
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Tricercle de Mohr (Georg Mohr, 1640-1697, danois plus connu pour son théorème : *Tout point constructible à la règle et au compas, peut l'être à l'aide du seul compas*)

Partie A

1) ABC est un triangle rectangle en B, H est le pied de la hauteur issue de B.
Montrer que les triangles formés par cette figure sont semblables entre eux.
En déduire $BH^2 = AH \times HC$.
Quel est le maximum atteint par la valeur BH ?
(Vous pourrez utiliser le cercle de diamètre $[AC]$)

2) E est un point du segment $[AC]$.
Dans le demi-disque défini par le demi-cercle (C), on construit les demi-cercles (C_1) et (C_2) de diamètres respectifs $[AE]$ et $[EC]$.



a) Montrer que le périmètre de la zone située entre les trois demi-cercles (partie hachurée sur la figure) est constant.
b) L'aire de cette zone est-elle constante ?
Vous pourrez vous aider de cas particuliers ou de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour argumenter.
c) Montrer que l'aire de cette zone est égale à

$$\frac{\pi}{4}AE.EC$$

Où placer le point E pour que cette aire soit maximale ?

Partie B

On reprend dans cette partie les éléments de la figure ci-dessus. E est un point du segment $[AC]$.
Dans le demi-disque défini par le demi-cercle (C), on construit les demi-cercles (C_1) et (C_2) de diamètres respectifs $[AE]$ et $[EC]$.
On pose, de plus, $AC = 10$ et $AE = x$.
1) Expliquer pourquoi $x \in [0;10]$.
2) Calculer le périmètre de la zone hachurée en fonction du réel x. Que constate-t-on ?
3) a) Calculer l'aire de la partie hachurée en fonction de x. On note $f(x)$ cette aire.
b) Montrer que pour tout $x \in [0;10]$, $f(x)$ peut s'écrire $\frac{\pi}{4}(25 - (x - 5)^2)$
4) Déterminer les variations de la fonction f sur $[0;5]$ puis sur $[5;10]$.
En déduire la présence d'un maximum.

Remarque : Vous avez trouvé par ces deux méthodes la condition sur deux réels positifs pour que leur produit soit maximal sachant que leur somme est constante.