Devoir Seconde

Algorithme de Babylone ou Algorithme de Héron (Héron d'Alexandrie, 1er siècle de notre ère)
Une tablette d'Argile conservée à l'université d'Yale prouve que cette méthode était connue des Babyloniens. Elle a été attribuée à Archytas de Tarente vers 400 av. J.-C.
On peut lire dans cette tablette (après transcription en base 10, puisque l'original est rédigé en base 60) l'équivalent de : $\sqrt{2}$ = 1,414222, valeur qui ne diffère que de 0,000008 de la vraie valeur : $\sqrt{2}$ = 1,414213562...
L'extraordinaire est qu'il fallut attendre la Renaissance pour en avoir une meilleure approximation ! Comment s'y sont-ils pris ?

Pour calculer $\sqrt{a}$, par exemple $\sqrt{2}$, prenons en une première approximation quelconque : a_1 soit $a_1 = 1{,}6$.
Choisissons comme seconde approximation : $b_1 = \dfrac{a}{a_1}$ soit $b_1 = \dfrac{2}{1{,}6} = 1{,}25$.
Si a_1 est trop petite, alors b_1 sera trop grande et vice-versa, donc une approximation meilleure sera donnée par la moyenne : $c_1 = \dfrac{1}{2}(a_1 + b_1)$ soit $c_1 = \dfrac{1}{2}(1{,}6 + 1{,}25) = 1{,}425$.
Et on recommence en prenant la valeur c_1 pour a_2.
On a donc $a_2 = 1{,}425$ et $b_2 = \dfrac{a}{a_2} = 1{,}4035...$ puis $c_2 = \dfrac{1}{2}(a_2 + b_2) = 1{,}41425...$
On répète le processus jusqu'à obtenir deux valeurs consécutives suffisamment proches et respectant la précision voulue.
Cet algorithme à l'avantage de "converger" très vite.

1) Utiliser la méthode des Babyloniens pour calculer une approximation décimale à 10^{-5} près de $\sqrt{5}$. Vous expliquerez pourquoi vous êtes certain d'avoir une valeur convenable.
2) Proposer sur votre calculatrice ou sur un tableur (du type Excel) un programme ou une démarche permettant d'obtenir une valeur approchée par cet algorithme.
3) Traduire l'algorithme géométriquement, c'est-à-dire interpréter géométriquement chacune des étapes de l'algorithme (calculer a_1b_1, a_2b_2, …) et construire géométriquement le processus proposé.

La navette fluviale
Un bateau assure la navette entre deux villes A et B situées sur le bord d'un fleuve. En l'absence de courant, sa vitesse est constante et égale à V. En présence de courant de vitesse v ($v < V$) la vitesse du bateau est alors :

- a l'aller, de A vers B : $V + v$
- au retour, de B vers A : $V - v$

1) Soit d la distance AB
Exprimer la durée t du trajet aller-retour en fonction de d et V, en l'absence de courant.
2) En présence de courant de vitesse v, montrer que la nouvelle durée du trajet aller-retour est
$$T = \frac{d}{V + v} + \frac{d}{V - v}$$
3) Etudier le signe de $T - t$
L'effet du courant est-il favorable ?
4) Calculer t et T lorsque :
$d = 25$ km , $V = 20$ km.h^{-1} , $v = 5$ km.h^{-1}