

## Contrôle Terminale S

### Exercice 1

Parce qu'elle aime souvent penser à lui, Tiphaine a décidé de replanter le rosier que Maxime lui avait offert. Tiphaine savait que, selon le modèle de Pierre Verhulst, la taille de ces roses au bout de  $t$  jours, exprimée en mètres et que l'on note  $f(t)$ , est solution de l'équation différentielle :

$$y' = ay(1 - y) \quad (E)$$

où  $a$  est une constante dépendant du type de fleurs.

1) Vérifier que la fonction :

$$u : t \rightarrow \frac{1}{1 + 9e^{-at}}$$

est solution de l'équation (E)

2) On pose  $y = \frac{1}{z}$ .

Démontrer que la fonction  $y$  est solution de (E) si, et seulement si, la fonction  $z$  est solution de l'équation :

$$z' = -az + a \quad (F).$$

3) En déduire, en fonction de  $a$ , les solutions de l'équation (F) puis celle de l'équation (E).

4) Pour ce type de fleurs, la constante  $a$  est voisine de  $a = 5 \cdot 10^{-2}$ . De plus, lorsque Tiphaine a reçu ce rosier, la hauteur de ses roses était alors de 10 cm. En déduire l'expression de la fonction  $f$  et retrouver l'expression de  $u$ .

5) Faire l'étude complète de la fonction  $u$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Quel commentaire peut-on faire, sur la taille de ces roses ?

6) Sa courbe représentative est donnée ci-dessus (une graduation correspond à 1 jour pour l'axe des abscisses et une graduation correspond à 10 cm pour l'axe des ordonnées).

Maxime a promis à Tiphaine qu'au bout d'un mois la taille de ses roses dépasserait les 50 cm.

Vérifier ce résultat à partir du graphique.

### Exercice 2

On admet que la charge  $q$  d'un condensateur est donnée en fonction du temps  $t$  exprimé en secondes ( $t \geq 0$ ) par  $q(t) = 6(1 - e^{-0,2t})$ .

1) Démontrer que la fonction  $q$  est croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  (le condensateur se charge).

2) Calculer la limite  $Q$  de la fonction  $q$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . ( $Q$  est la charge maximale du condensateur).

3) Justifier qu'il existe un instant  $t_0$  unique tel que  $q(t_0) = 5,7$ .

En donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

Au bout de combien de secondes la charge du condensateur sera-t-elle supérieure à 5,7 ?

