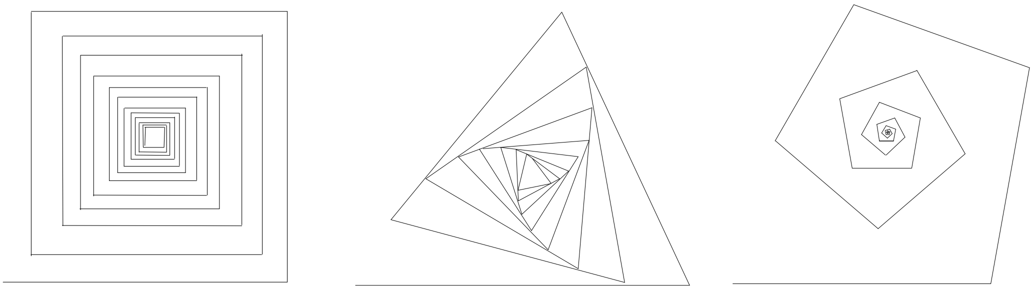
Devoir Terminale S

Exercice 1 : Les jolygones

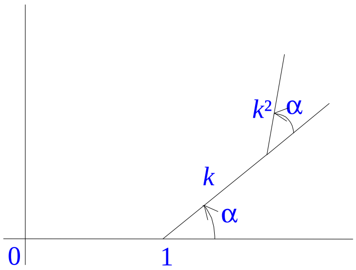
Les trois dessins représentés ci-dessous sont obtenus par la même technique de construction :

- on trace un segment horizontal de longueur a
- on tourne de l'angle α et on trace dans le prolongement un segment horizontal de longueur ka
- et ainsi de suite à chaque extrémité, on tourne de α et on trace le segment suivant de longueur multipliée par k.



$\alpha = 90°$ et $k = 0{,}95$ $\alpha = 115°$ et $k = 0{,}9$ $\alpha = 80°$ et $k = 0{,}85$

En prenant $k < 1$, on s'assure de rester dans les limites de la feuille ; et l'on voit que les segments forment une sorte de spirale semblant tendre vers un point. Peut-on préciser ce point ?



Utilisons pour cela les nombres complexes. Si un segment est représenté par un nombre complexe a alors le segment suivant, qui a tourné de α (multiplié par $e^{i\alpha}$) et a été multiplié par k, est le segment représenté par $ake^{i\alpha}$.

Déterminer l'affixe de l'extrémité du jolygone puis la position limite.
Déterminer l'affixe de la position limite de l'extrémité du jolygone dans le troisième exemple ci-dessus.

Exercice 2

Soit les deux suites u et v définies par la donnée de u_0 et v_0 ($u_0 < v_0$) et les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

1) Démontrer que la suite $v - u$ est une suite géométrique. Donner la limite de cette suite.
2) Prouver que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.
3) Montrer que les deux suites u et v sont adjacentes.
4) Montrer que la suite $v + u$ est une suite constante.
5) En déduire la valeur de la limite commune des deux suites u et v.