Devoir n°1 : Présentation historique des nombres complexes

Au XVI^{e} siècle, en pleine renaissance italienne, l'équation du troisième degré est résolue algébriquement, dans le cadre de concours entre les savants Tartaglia et Cardan. Ce dernier expose une "formule" donnant une racine de l'équation $x^3 = px + q$.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} \qquad \text{(}\textit{Ars Magna, 1547}\text{)}$$

<u>Première Partie</u>

1) A l'aide de la formule ci-dessus, déterminer une solution x_0 de l'équation (E) : $x^3 = 36x + 91$.
Montrer que l'équation peut alors s'écrire sous la forme $(x - x_0)(x^2 - ax + b) = 0$; déterminer a et b.
Résoudre complètement l'équation (E).

2) Peut-on appliquer la formule de Cardan à l'équation $x^3 = 51x + 104$?
En utilisant votre calculatrice graphique et en expliquant votre méthode, déterminer le nombre de solutions de (E) à l'aide de la fonction $x \to x^3 - 51x + 104$.
Cette dernière équation sera résolue dans la partie suivante en introduisant un "nombre", noté i, tel que $i^2 = -1$.

<u>Deuxième Partie</u>

On considère l'équation (E) : $x^3 = 51x + 104$.

1) En remarquant que $(47i)^2 = -2\,209$, montrer que la formule de Cardan s'écrit "formellement"
$$x = \sqrt[3]{52 + 47i} - \sqrt[3]{-52 + 47i}$$

2) Calculer $(4 + i)^3$ et $(-4 + i)^3$. En déduire une solution α de (E).

3) Montrer que $x^3 - 51x - 104$ peut s'écrire sous la forme $(x - \alpha)(x^2 - ax + b)$, puis achever la résolution de (E).

Cette présentation montre toute l'efficacité de l'ingénieuse invention du nombre ***i***, due à Bombelli qui, dans son *Algèbre* (1572), énonça des règles de multiplication dans la célèbre comptine ci-dessous :

Più via più di meno fa più di meno.
Meno via più di meno fa meno di meno.
Più via meno di meno fa meno di meno.
Meno via meno di meno fa più di meno.
Miù di meno via più di meno fa meno.
Più di meno via meno di meno fa più.
Meno di meno via più di meno fa più.
Meno di meno via meno di meno fa meno.

Traductions: *Più* = +1 , *Meno* = -1, *Più di meno* = *i*, *Meno di meno* = -*i*

La reconnaissance de ces nombres imaginaires reste très controversée chez les mathématiciens jusqu'à leur représentation géométrique décrite par Gauss dans sa lettre à Bessel en 1811 : " ... on peut représenter toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini.
(Le complexe $z = a + ib$ est représenté par le point $M(a, b)$ du plan muni d'un repère orthonormal)