

## Utilisation du principe de promenade aléatoire pour visualiser une conjecture<sup>1</sup> :

Si on considère la suite des puissances de  $\frac{3}{2}$  et si on ne regarde que les chiffres après la virgule, on tombe sur un problème que les mathématiciens ne savent pas encore résoudre : cette suite de nombres est-elle aléatoire ?

Autre formulation du problème : **Le critère de Weyl**

En 1916, Hermann Weyl énonce le critère d'équirépartition modulo 1 : la suite  $(u_n)$  est équirépartie modulo 1 si et seulement si, pour tout entier  $h$  non nul,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2i\pi hu_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

On peut donner une traduction graphique de ce critère en associant aux  $N$  premiers termes  $hu_n$  des points d'un cercle de rayon 1. Le critère de Weyl exprime que pour tout  $h$ , le barycentre de l'ensemble ainsi obtenu tend vers l'origine lorsque  $n$  tend vers l'infini.

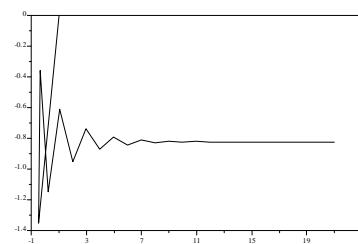
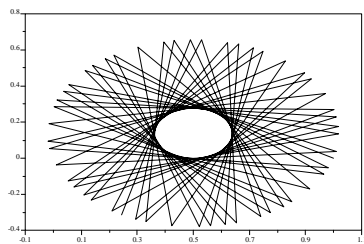
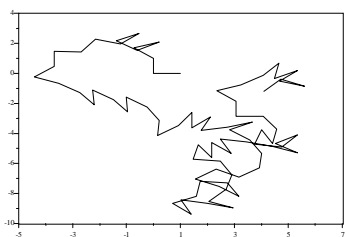
Ce critère permet de montrer que la suite des multiples d'un nombre irrationnel est équirépartie modulo 1.



Afin d'illustrer cette question, vous devrez utiliser une méthode graphique :  
Comment construire une promenade associée à une suite modulo 1 ?

- Le point de départ est le centre d'un cercle de rayon 1.
- A la première étape, on place le premier terme de la suite, suivant sa valeur, sur le cercle et l'on joint les deux points. L'angle permettant de repérer ce point étant proportionnel à sa valeur, modulo 1.  
Exemple : si la première valeur est 3,258 968 ... soit 0,258 968 ... modulo 1, l'angle permettant de repérer ce point sur le cercle est  $0,258\ 968 \dots \times 2\pi$  rad
- Le dernier point dessiné devient le centre du nouveau cercle qui va servir à la deuxième étape et ainsi de suite...

Les schémas suivants présentent respectivement une promenade aléatoire des puissances de  $\frac{3}{2}$ , une autre sur les multiples de  $\sqrt{2}$  et enfin des puissances de  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , le "nombre d'or".



<sup>1</sup> D'après *La suite des puissances de 3/2*, François Dress et Michel Mendès France, La recherche, Octobre 2001.