Chapitre II
Généralités sur les fonctions

I) Limites de fonctions

1) Fonctions usuelles et opérations sur les limites

cf feuille polycopiée

2) Limite d'une fonction composée

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 7}$.
Pour déterminer, éventuellement, les limites en l'infini, déterminons D_f :
$\Delta = -3 < 0$ donc le trinôme est toujours du signe de a, ici 1, donc le trinôme est toujours positif et $D_f = \mathbb{R}$.
Posons $u(x) = x^2 - 5x + 7$. $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$ (monôme de plus haut degré ou par la factorisation) et limite $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
De même en $+\infty$.

Théorème

f, g et h sont trois fonctions telles que $h = f \circ g$.

Si $\left(\lim\limits_{x \to a} g(x) = b\right)$ et $\left(\lim\limits_{x \to b} f(x) = c\right)$ alors $\left(\lim\limits_{x \to a} h(x) = c\right)$

Conséquence

Pour étudier la limite en $+\infty$ d'une fonction, on peut se ramener à une étude en 0 à droite d'une autre fonction en posant $X = \dfrac{1}{x}$.

Ex : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{1}{X}\sin X$ en posant $X = \dfrac{1}{x}$

$= \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ (limite usuelle)

3) Théorèmes de comparaison

Compatibilité avec l'ordre au voisinage de $+\infty$:
Soient f et g deux fonctions admettant des limites finies l et l' en $+\infty$.
Si pour tout x d'un intervalle de la forme $]b;+\infty[$ (ou pour x assez grand), on a $f(x) \leqslant g(x)$ alors $l \leqslant l'$.

Comparaisons

Si, pour tout x assez grand, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Si, pour tout x assez grand, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

De même en $-\infty$.

Exemple :
Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2\cos(x) + 4}$.

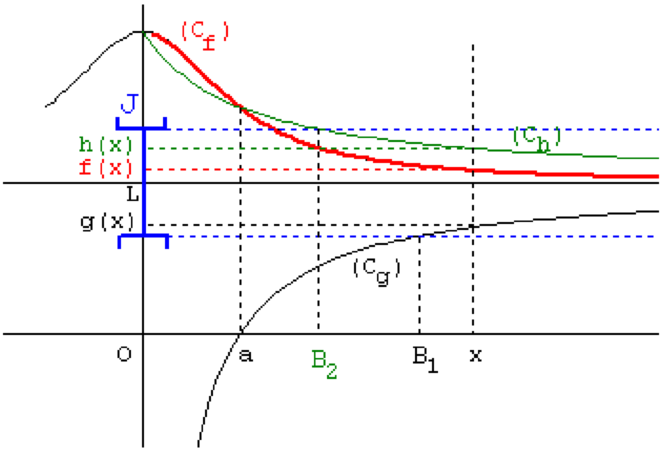
Limites par encadrement (ou théorème des gendarmes) :
Soient f, g, h trois fonctions et l désignant un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si, pour tout x assez grand, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$

Démonstration
Définition (rappel)

On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ou bien $\lim\limits_{+\infty} f = L$



Soit J un intervalle ouvert quelconque de centre L.
On a :
- d'une part $\lim\limits_{+\infty} g = L$ donc il existe un réel B_1 tel que $x > B_1 \Rightarrow g(x) \in J$
- d'autre part $\lim\limits_{+\infty} h = L$ donc il existe un réel B_2 tel que $x > B_2 \Rightarrow h(x) \in J$

Prenons B tel que $B > B_1$, $B > B_2$ et $B > a$. On a alors

$$x > B \Rightarrow \begin{cases} x > a \\ x > B_1 \\ x > B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) \le f(x) \le h(x) \\ g(x) \in J \\ h(x) \in J \end{cases} \Rightarrow f(x) \in J$$

On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f = L$

Exemple

Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + \sin(3x)}{2x^3}$.

4) Courbes asymptotes (ou branches infinies)

Asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ avec a réel (ou vers $-\infty$)

Alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à C_f.

Asymptotes parallèles à l'axe des abscisses

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ avec l réel (ou en $-\infty$)

Alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Asymptotes oblique

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$ avec a et b réels (ou en $-\infty$)

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Courbes asymptotes

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ (resp. en $-\infty$)

Alors les courbes C_f et C_g sont asymptotes en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$ (de même en $-\infty$) donc C_f et C_g sont asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.

Limites de fonctions usuelles

<u>Limite infinie d'une fonction à l'infini</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et plus généralement, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et plus généralement, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

<u>Limite finie d'une fonction à l'infinie</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et plus généralement , $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et plus généralement , $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

<u>Limites de fonctions usuelles en un réel</u>

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Opérations sur les limites

Dans les tableaux qui suivent, les limites des fonctions f et g sont prises soit en $-\infty$, soit en $+\infty$, soit en un réel a. l et l' sont des nombres réels.
Lorsqu'il n'y a pas de conclusion en général, on dit alors qu'il y a un cas de forme indéterminée.

Limite d'une somme

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

Si f a pour limite	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(+\infty)$ ou $(-\infty)$
Alors $f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient $\dfrac{f}{g}$ dans le cas où la limite de g n'est pas nulle

Si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(+\infty)$ ou $(-\infty)$
Si g a pour limite	$l' \neq 0$	$(+\infty)$ ou $(-\infty)$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$(+\infty)$ ou $(-\infty)$
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient $\dfrac{f}{g}$ dans le cas où la limite de g est nulle

Si f a pour limite	$(l > 0)$ ou $(+\infty)$	$(l > 0)$ ou $(+\infty)$	$(l < 0)$ ou $(-\infty)$	$(l < 0)$ ou $(-\infty)$	0
Si g a pour limite	0 restant positive	0 restant négative	0 restant positive	0 restant négative	0
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Eléments de symétrie d'une courbe

(C) est la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Changement de repère

Le point A a pour coordonnées $(a;b)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$. Un point M du plan a des coordonnées (x,y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X,Y) dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$; vectoriellement, cela signifie que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{AM} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$. Le relation de Chasles sur les vecteurs permet alors d'obtenir les formules de changement de repère :

De $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, on trouve $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$

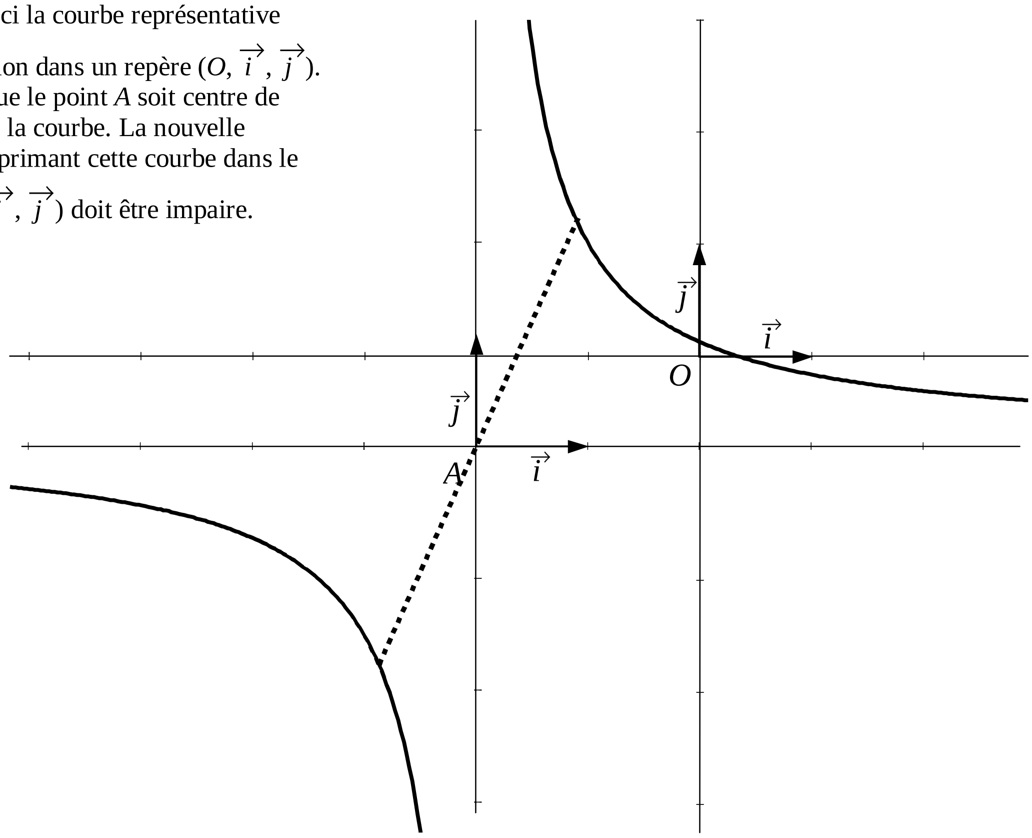
Ce changement de repère conduit à une équation de la courbe (C) dans le nouveau repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$:

$M \in (C) \Leftrightarrow y = f(x)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$\Leftrightarrow Y = g(X)$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ en ayant utilisé les formules de changement de repère

Si g est paire alors l'axe $(A, \vec{j})$ est axe de symétrie de (C)
Si g est impaire alors le point A est centre de symétrie de (C)

On a tracé ici la courbe représentative d'une fonction dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Il semble que le point A soit centre de symétrie de la courbe. La nouvelle fonction exprimant cette courbe dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ doit être impaire.



Axe de symétrie

Pour démontrer que la droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe (C) :

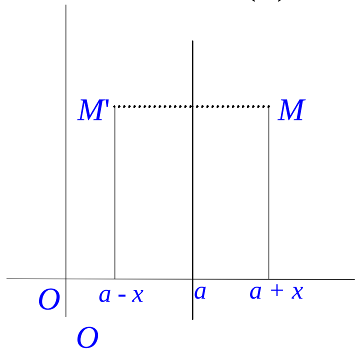
<u>Méthode 1</u> : par le changement de repère

Ω est le point de coordonnées $(a;0)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On montre que dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) est la courbe représentative d'une fonction paire.

<u>Méthode 2</u>

On montre que :

- si $a + x$ est dans D_f alors $a - x$ est aussi dans D_f.
- $f(a + x) = f(a - x)$



Application :

f est la fonction définie sur |R par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$

Démontrer, en utilisant les deux méthodes, que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C).

Centre de symétrie

Pour démontrer que le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe (C) :

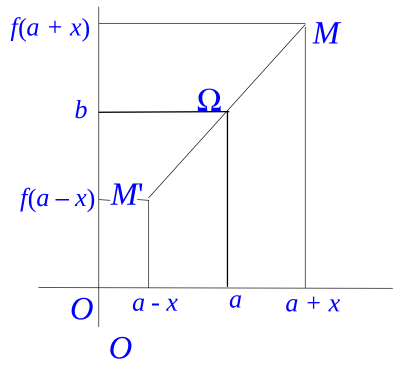
<u>Méthode 1</u>

On montre que dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) est la courbe représentative d'une fonction impaire.

<u>Méthode 2</u>

On montre que :

- si $a + x$ est dans D_f alors $a - x$ est aussi dans D_f.
- $\dfrac{f(a + x) + f(a - x)}{2} = b$



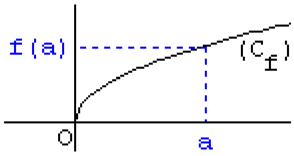
Application :

f est la fonction définie sur |R par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

Démontrer, en utilisant les deux méthodes, que le point $\Omega(-1;-2)$ est un centre de symétrie de (C)

II) Continuité d'une fonction

1) Fonction continue en un point



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant le réel a.

On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{a} f = f(a)$ ou bien $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

Exemple

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^+$: En effet, pour tout réel $a \geq 0$, on a $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Contre-exemple : la fonction *Partie entière*

La fonction *Partie entière* qui à tout réel x associe le plus grand entier relatif inférieur à x, noté $E(x)$, est représentée ci-dessous.

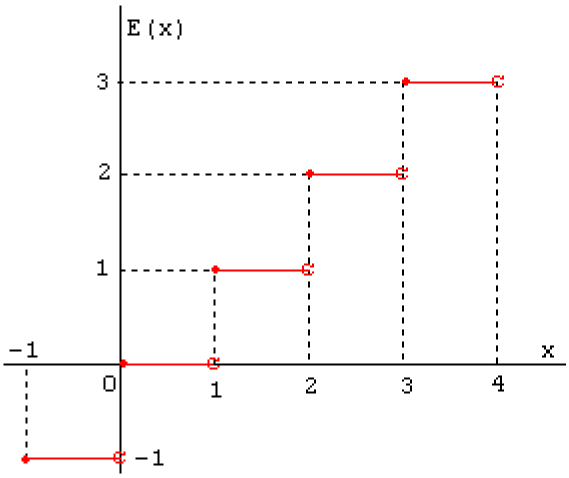
Pour tout réel x, on a $E(x) \leq x < E(x)+1$

E est-elle continue en 2 ?

Pour $x \in [1;2[$, $E(x)=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} E(x) = 1$

Pour $x \in [2;3[$, $E(x)=2$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} E(x) = 2$

Ces limites étant différentes, la fonction E n'admet pas de limite en 2.Donc E n'est pas continue en 2.



2) Fonction continue sur un intervalle

Définition

Une fonction est dite continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

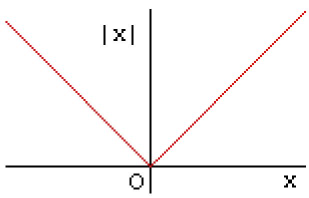
Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle se traduit par un tracé de sa courbe sur cet intervalle *sans lever le crayon*.

Exemples précédents

- la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$
- la fonction *Partie entière* n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur tout intervalle du type $[n;n+1[$, où n est un entier relatif quelconque.

Théorème

Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.



Remarque : la réciproque de ce théorème est fausse.

Ainsi la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ sans y être dérivable.

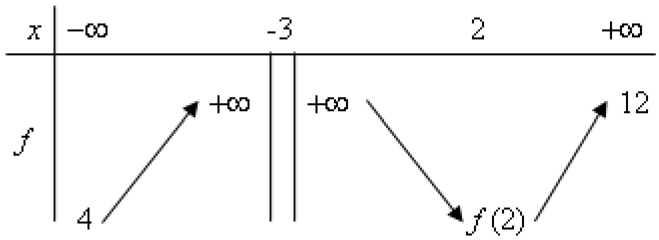
En effet, elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe n'admet pas de tangente au point O.

Propriété

Les fonctions usuelles (fonctions polynômes, $\sin$, $\cos$, $\sqrt{\ }$, $|\ |$) ainsi que toute fonction construite à partir de celles-ci, sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

Convention : Les flèches dessinées dans un tableau de variation traduisent le sens de variation et la continuité de la fonction.

Ici f est strictement croissante sur $]-\infty;-3[$ et sur $[2;+\infty[$. Elle est strictement décroissante sur $]-3;2]$.
f est continue sur $]-\infty;-3[$ et sur $]-3;+\infty[$.



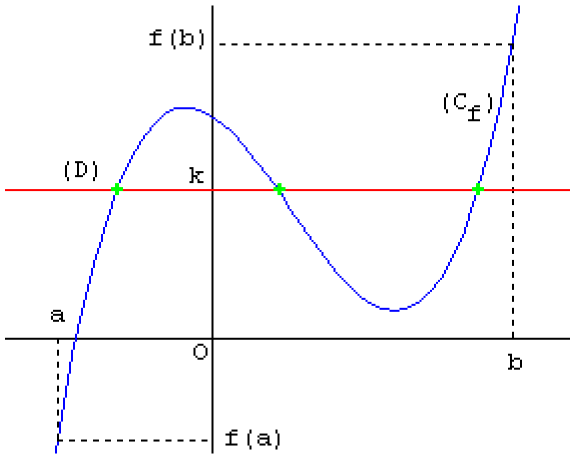
3) Propriétés des fonctions continues.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.
Autrement dit, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.

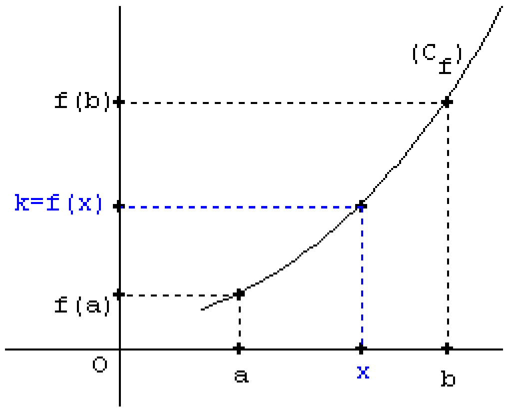
Interprétation graphique

La droite (D) d'équation $y=k$ coupe la courbe de f en au moins un point dont l'abscisse est comprise entre a et b.



Corollaire

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans $[a\ ;\ b]$.



Démonstration :

Supposons que f soit continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$, et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

● puisque f est continue sur $[a\ ;\ b]$, d'après le théorème, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.

● puisque f est strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$, cette solution est unique. En effet, supposons qu' existent deux réels distincts x_1 et x_2 tels que $f(x_1)=k$ et $f(x_2)=k$. On aurait alors $f(x_1)=f(x_2)$, ce qui est impossible car la stricte monotonie de f sur $[a\ ;\ b]$ impose $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Remarque : ce corollaire s'étend au cas où f est continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues.

Exercice : Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ sur $[0;+\infty[$, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

$x \to x^3 + 3x^2 - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme (ou comme somme de trois fonctions continues).
Etudions plus précisément sur $[0;+\infty[$:
La fonction f définie ainsi est une bijection croissante de $[0;+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$ (comme somme de deux fonctions croissantes et $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.)
Comme $0 \in [-1;+\infty[$ (0 se trouve dans l'intervalle d'arrivée), 0 possède un unique antécédent. et $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $[0;+\infty[$.

$f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 3 > 0$ donc, d'après le T.V.I., la solution α se trouve dans $[0;1]$.
En procédant de même et à l'aide de la calculatrice, on trouve l'encadrement $\alpha \in]0,53;0,54[$.

Quelques questions "classiques" lors d'une étude de fonction

Déterminer ou expliquer l'ensemble de définition de la fonction f

Les fonctions polynômes, exponentielles, sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

La fonction inverse n'est pas définie en 0 et la fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$

La fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$

La fonction tan est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k\in\mathbb{Z}$.

Pour certaines fonctions, on peut réduire l'étude à un autre intervalle lorsque l'on montre que la courbe possède certaines symétries :

- Si f est paire, on étudie f sur $D\cap\mathbb{R}_+$, et on complète la courbe par symétrie par rapport à (Oy)
- Si f est impaire, on étudie f sur $D\cap\mathbb{R}_+$, et on complète la courbe par symétrie par rapport au point O
- Si C_f admet un axe de symétrie (Δ) d'équation $x = a$, on étudie f sur $[a;+\infty[\cap D$, et on complète par symétrie par rapport à (Δ). (2 méthodes pour les axes ou centres de symétrie, on doit connaître en particulier le changement de repère)
- Si C_f admet un centre de symétrie $\Omega(a;b)$, on étudie f sur $[a;+\infty[\cap D$, et on complète par symétrie par rapport au point Ω.
- Si f est périodique de période T, on étudie f sur $D\cap I$ où I est un intervalle de longueur T.

Lorsque f est, de plus, paire ou impaire, on prendra pour I l'intervalle de centre O, $[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}]$,de manière à ne considérer par la suite que l'intervalle d'étude $D\cap[0;\frac{T}{2}]$ et on complétera par symétrie.

Détermination des limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f.

La limite peut être évidente

Si la fonction est continue (définition de la continuité) en le point où l'on cherche la limite, cette dernière est égale à la valeur en le point : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Sinon, on utilise une des nombreuses méthodes pour tenter de lever l'indétermination (plus haut degré en l'infini pour une fonction polynôme, factorisation par $x - a$ lorsqu'une fonction polynôme s'annule en a, quantité conjuguée pour une fonction racine, …)

Dans tous les cas, on tente de se ramener à l'une des limites classiques (celles du cours de première ou de terminale). On peut alors effectuer des changements de variables pour se rapprocher d'une limite connue ou plus simple.

On peut également déterminer une limite par comparaison et non pas directement (inégalité, gendarmes)

On en déduit d'éventuelles asymptotes à la courbe : horizontales, verticales, obliques. Les asymptotes horizontales et verticales éventuelles s'obtiennent par interprétation des limites aux bornes de l'ensemble de définition).

Possibilité de démontrer des asymptotes autres qu'affines : paraboliques, cubiques, ...). Cette détermination peut être facilitée en recherchant une autre écriture de $f(x)$. Un exercice classique est de démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + h(x)$ avec $\lim\limits_{|x|\to\infty} h(x) = 0$ et on devine que la droite d'équation $y = ax + b$ est peut-être une équation de l'asymptote recherchée.

On peut alors rechercher la position relative de la courbe par rapport à ses asymptotes, et plus encore des calculs de distances ou mesures algébriques entre une courbe et sa courbe asymptote.

Etude du sens de variation de la fonction, pour cela :
→ Méthode utilisant la fonction dérivée (la plus utilisée)
On définit l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable (ensemble de dérivabilité) :
les théorèmes généraux assurent l'existences d'intervalles sur lesquels la fonction est dérivable. Lorsque certaines valeurs de l'ensemble de définition ne figurent pas dans ces intervalles, on détermine si la fonction est dérivable en un point, on utilise pour cela la limite du taux d'accroissement, il faut qu'elle existe et qu'elle soit finie.
Vous devez connaître l'interprétation d'une fonction non dérivable en un point (graphiquement présence d'une tangente verticale ou deux demi-tangentes différentes). Les contre-exemples classiques sont donnés par la fonction valeur absolue et la fonction racine carrée.

On détermine la dérivée de la fonction et on étudie son signe.
Cette recherche est parfois évidente : somme de termes positifs, …
On utilise parfois le signe du trinôme : il est important de maîtriser cette technique (du signe de a à …)
On peut réutiliser un signe obtenu dans une première partie de l'exercice (fonction auxiliaire)
On en déduit le sens de variation de f
On dresse le tableau de variation de f (avec les limites et les valeurs exactes aux bornes des flèches)

→ D'autres méthodes sont possibles
somme de deux fonctions croissantes
composées de fonctions dont on connaît les variations

Utilisation de la dérivée
La dérivée en un point permet de construire des approximations affines pour obtenir des valeurs approchées sans utiliser la calculatrice.
On peut mettre en évidence une tangente particulière ; une tangente peut être déterminée par un point et un vecteur directeur, on un point et son coefficient directeur (égal au nombre dérivé), ou une équation.
On peut effectuer des interprétations (la dérivée d'une quantité est l'expression de la variation instantanée de cette quantité - loi horaire en mécanique)
Recherche des lieux dont la tangente possède tel coefficient directeur.
Il est parfois possible de rechercher des dérivées successives
Construction approchée de la courbe d'une fonction définie par une équation différentielle (méthode d'Euler)

Utilisation des variations
Détermination d'un extremum éventuel (après l'avoir justifié) qu'il soit local ou global
Images d'intervalles, détermination du signe d'une fonction

Lors de la résolution d'équations liées à la fonction, utiliser ses variations et la continuité de la fonction pour justifier l'existence de solutions (théorème des valeurs intermédiaires) et en donner un encadrement.
On justifie pour cela la nature "bijective" d'une fonction (continue + monotone + intervalle image)

Certaines fonctions bijectives et leurs réciproques sont à connaître :puissances et racines n-ième?
exponentielle et logarithme.
On peut alors obtenir une valeur approchée ou un meilleur encadrement en utilisant la calculatrice.

Dresser un tableau de valeurs de la fonction (et dans ce cas, il est complet avec les valeurs ou les limites aux bornes des flèches)

Construction de la courbe représentative d'une fonction
On s'aide des questions précédentes pour le tracé de la courbe. On doit tenir compte du repère indiqué dans l'énoncé, sinon on le choisira judicieusement. La calculatrice graphique permet de détecter des erreurs éventuelles.
On peut également s'aider de tangentes remarquables pour le tracé de la courbe.
On peut alors contrôler certaines propriétés suggérées par la figure, comme la présence d'un élément de symétrie et **vérifier les résultats précédents**. Les tangentes horizontales sont à indiquer.

Il peut ensuite apparaître des questions résolues graphiquement :
Etude, suivant les valeurs d'un paramètre, du nombre de solutions d'équations, d'inéquations, …
On peut également demander de construire la courbe représentative d'une fonction associée à la première: $|f|$, kf, …

Détermination de primitives de fonctions
Soit directement, soit en calculant la dérivée d'une autre fonction. La méthode de l'intégration par parties est à connaître.
Il faut connaître la différence entre une primitive sur un intervalle, toutes les primitives et la primitive telle que …

Calcul d'aires de domaines (en unité d'aire ou en une autre unité)
Vous devez parfois transformer le domaine en un autre domaine isométrique (par une transformations classique). Il est alors peut-être plus facile de déterminer l'aire de la nouvelle surface.
