Logarithme Népérien

I) Définition - Propriétés

Rappel

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$, c'est-à-dire que pour tout $k \in\ ]0;+\infty[$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$, cette solution a été notée $\ln(k)$.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien la fonction, notée ln, qui à un réel x strictement positif, fait correspondre l'unique réel y tel que $e^y = x$; c'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

On notera : $]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \to \ln(x)$

Conséquences

- Pour tout réel x strictement positif , on a $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout réel x, on a $\ln\left(e^{x}\right) = x$
- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
- $x \in\ ]0;+\infty[$ et $y = \ln(x) \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$ et $e^y = x$
- La fonction logarithme népérien est une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

II) Equation fonctionnelle caractéristique

Théorème

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Dem : Soient a et b deux réels strictement positifs on a :

$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$.

Sachant que si $e^{x} = y$, alors $x = \ln y$, on en déduit $\ln a + \ln b = \ln(ab)$

Conséquence

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

$$\ln\frac{1}{a} = -\ln a \ ;\ \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \ ;\ \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$$

Dem : $e^{-\ln a} = \dfrac{1}{e^{\ln a}} = \dfrac{1}{a}$ donc $-\ln a = \ln\dfrac{1}{a}$

$e^{\ln a - \ln b} = \dfrac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}} = \dfrac{a}{b}$ donc $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$

On peut écrire $\ln a = \ln(\sqrt{a}\ \sqrt{a}) = \ln\sqrt{a} + \ln\sqrt{a} = 2\ln\sqrt{a}$ donc $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n\ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$ donc $n\ln a = \ln\left(a^n\right)$

Propriété

Si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont n réels strictement positifs ($n \in \mathbb{N}^*$) , alors

$$\ln(a_1.a_2.\cdots.a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n$$

Dem :

La proposition est vraie de façon évidente pour $n = 1$ et $n = 2$

Supposons qu'elle est vraie pour un entier $n \geqslant 2$

Considérons alors $n + 1$ réels strictement positifs $a_1, a_2, ..., a_n , a_{n+1}$

On peut écrire $\ln(a_1.a_2.\cdots.a_n.a_{n+1}) = \ln(a_1.a_2.\cdots.a_n) + \ln(a_{n+1})$

puisque $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

et de plus comme la proposition est vraie pour n, on a

$$\ln(a_1.a_2.\cdots.a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n$$

Donc $\ln(a_1.a_2.\cdots.a_n.a_{n+1}) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n + \ln(a_{n+1})$

c'est-à-dire que la proposition est vraie pour $n + 1$.

On a donc démontré par récurrence que la proposition est vraie pour tout entier n $\geqslant 1$.

III) Étude de la fonction logarithme népérien

1) Propriétés

• La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ c'est-à-dire tels que $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.

La stricte croissance de l'exponentielle permet d'écrire $\ln a < \ln b$.

• Si $x > 1$ alors $\ln x > 0$ et Si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$

De même par la stricte croissance de la fonction ln.

• La fonction ln est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

La continuité et la dérivabilité peuvent être déduites graphiquement de la courbe de la fonction exponentielle qui est sa fonction réciproque. La formule peut être obtenue en dérivant $e^{\ln x}$

$$1 = (x)' = \left(e^{\ln x}\right)' = \ln'(x)\, e^{\ln x} = \ln'(x) \times x \text{ d'où } \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Remarque (caractérisation par les primitives de la fonction ln) :

On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la primitive définie sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction $x \to \dfrac{1}{x}$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

La fonction ln étant strictement croissante, on a $\ln 2 > \ln 1$ donc $\ln 2 > 0$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln 2 = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln 2^n = +\infty$.

$\ln 2^n$ est donc aussi grand que l'on veut en prenant n assez grand.

La fonction ln étant croissante, si $x \geqslant 2^n$ on a $\ln x \geqslant \ln 2^n$

Donc $\ln x$ est aussi grand que l'on veut en prenant x assez grand, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Pour étudier $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x$ posons $X = \dfrac{1}{x}$ c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{X}$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives X tend vers $+\infty$ et on a $\ln x = \ln\dfrac{1}{X} = -\ln X$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} -\ln X = -\infty$.

• Le tableau de variations de la fonction ln est :

x	0		$+\infty$
ln	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• Résolutions d'équations et d'inéquations

Comme ln réalise une bijection croissante de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

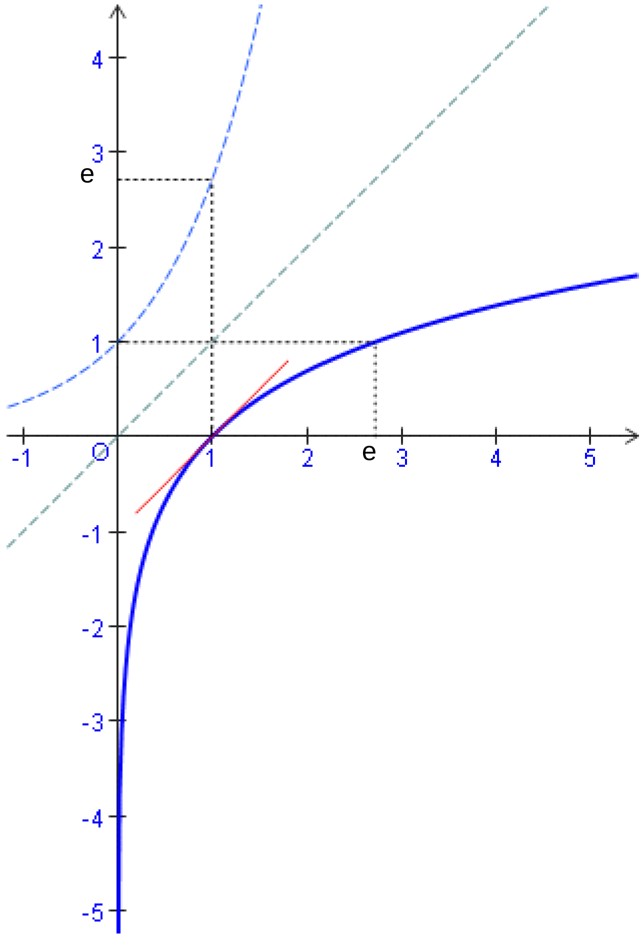
Pour tous réels a et b strictement positifs, $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

Pour tous réels a et b strictement positifs, $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$

Pour tout $x > 0$, $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

2) Courbe représentative

On a vu que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$



La courbe C de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy)

On a vu que $\ln(1 + x)$ a pour approximation affine x au voisinage de 0 ,
La courbe a pour tangente au point d'abscisse 1 la droite T d'équation $y = x - 1$
(On peut justifier que la courbe se situe au-dessous de cette tangente)

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3) Autres limites

Propriétés

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$ ou : $\ln(1 + x)$ a pour approximation affine x au voisinage de 0.

Dem : On sait que $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. Le nombre dérivé de la fonction ln en 1 est donc $\dfrac{1}{1} = 1$.

Par définition du nombre dérivé, on peut donc écrire $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1 + h) - \ln 1}{h} = 1$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1 + h)}{h} = 1$ ou encore $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

Pour une fonction f dérivable en x_0, l'approximation affine de $f(x_0 + h)$ est $f(x_0) + f'(x_0) \times h$

L'approximation affine de $\ln(1 + h)$ est donc $\ln 1 + \ln' 1 \times h = 0 + h = h$
L'approximation affine de $\ln(1 + x)$ au voisinage de 0 est donc x .
Cela revient à dire que la courbe de la fonction ln a pour tangente au point d'abscisse 1 la droite d'équation $y = x$

Propriété

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$

Au voisinage de l'infini x l'emporte sur le logarithme népérien de x.

Dem : Pour déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, posons $X = \ln x$ on a alors $e^X = x$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$.

On peut écrire $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{e^X}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{X}{e^X}$.

Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Interprétation graphique :

On dit que la courbe a pour direction asymptotique l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$

Pour déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln x = 0$, posons $X = \dfrac{1}{x}$ on a alors $x = \dfrac{1}{X}$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$

On peut écrire $x\ln x = \dfrac{1}{X}\ln\dfrac{1}{X} = -\dfrac{1}{X}\ln X = -\dfrac{\ln X}{X}$

Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{\ln X}{X} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln x = 0$.

4) Dérivée de ln o *u*

Propriété

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction ln o u qui à x associe $\ln(u(x))$ est dérivable sur I, et on a : $(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$

Dem : La fonction ln étant dérivable sur $]0;+\infty[$, l'application de la propriété de dérivation des fonctions composées permet d'affirmer que si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction $\ln \circ u$ qui à x associe $\ln(u(x))$ est dérivable sur I,

et on a : $(\ln \circ u)' = u' \times \ln' \circ u = u' \times \dfrac{1}{u} = \dfrac{u'}{u}$

III) Fonction Puissance réelle

On a vu que pour tout $a > 0$, tout réel b, on pose $a^b = e^{b\ln a}$

Théorème

La fonction $x \to x^\alpha$, α réel, est définie dérivable sur $]0;+\infty[$.

Sa dérivée est $x \to x^{\alpha - 1}$

Dem : $\forall\, x > 0$, $f(x) = x^\alpha = e^{b\ln x}$

$f'(x) = (\alpha\ln x)'\, e^{b\ln x} = \alpha\dfrac{1}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$

IV) Logarithme décimal

Remarque

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x = 10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x = 100$, la valeur 3 lorsque $x = 1000$ etc...)

Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal.

Définition

On appelle fonction logarithme décimal et on note log la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$\log : \ ]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Propriétés

• $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$;

• Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad ; \quad \log \frac{1}{a} = -\log a \quad ; \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad ; \quad \log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$$

• Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log a^n = n \log a$

Dem : $\log 1 = \dfrac{\ln 1}{\ln 10} = \dfrac{0}{\ln 10} = 0$

• $\log 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 10} = 1$

• Soient a et b deux réels strictement positifs

$$\log(ab) = \frac{\ln(a \times b)}{\ln 10} = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \frac{\ln a}{\ln 10} + \frac{\ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$$

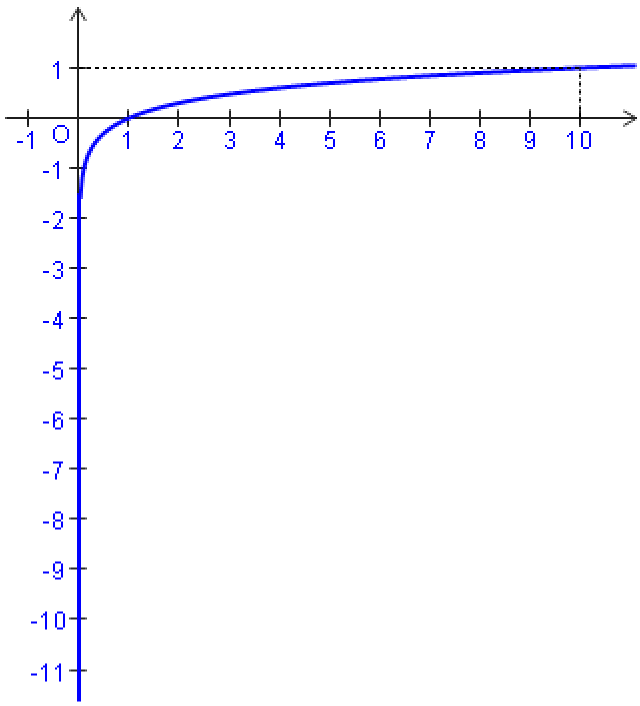
$$\log \frac{1}{a} = \frac{\ln \frac{1}{a}}{\ln 10} = \frac{-\ln a}{\ln 10} = -\frac{\ln a}{\ln 10} = -\log a$$

$$\log \frac{a}{b} = \frac{\ln \frac{a}{b}}{\ln 10} = \frac{\ln a - \ln b}{\ln 10} = \frac{\ln a}{\ln 10} - \frac{\ln b}{\ln 10} = \log a - \log b$$

$$\log \sqrt{a} = \frac{\ln \sqrt{a}}{\ln 10} = \frac{\frac{1}{2} \ln a}{\ln 10} = \frac{1}{2} \times \frac{\ln a}{\ln 10} = \frac{1}{2} \log a$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\log a^n = \frac{\ln a^n}{\ln 10} = \frac{n \ln a}{\ln 10} = n \frac{\ln a}{\ln 10} = n \log a$$



Remarque

La fonction logarithme décimal étant définie par

$\log x = k \ln x$ avec $k = \dfrac{1}{\ln 10}$

Il est facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative.

x	0	$+\infty$
log	$\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$