Chapitre
Les fonctions usuelles

I. Fonctions affines

a) définition

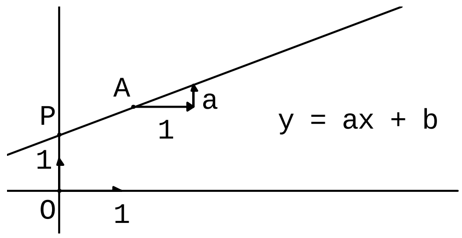
Soient a et b deux réels donnés. Lorsqu'à chaque réel x, on associe le réel $ax + b$, on définit une **fonction affine** f et on note $f(x) = ax + b$.

exemple : les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 5$ et $g(x) = 2x - 7$ sont des fonctions affines.

- Lorsque $b = 0$, la fonction est dite linéaire, comme par exemple, $f(x) = -3x$.
- Lorsque $a = 0$, la fonction est dite constante, comme par exemple, $f(x) = 3$, pour tout réel x.

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite. On dit que cette droite a pour équation $y = ax + b$ et que a est son coefficient directeur, b son ordonnée à l'origine.

Cette droite passe par le point P(0 ; b).



conséquences :

- Dans le cas d'une **fonction linéaire** $x \mapsto ax$, la droite d'équation $y = ax$ passe par l'origine du repère. L'image est proportionnelle à la variable.
- Dans le cas d'une **fonction constante**, la droite d'équation $y = b$ est parallèle à l'axe des abscisses. L'image est constamment égale à b.

b) fonctions affines et taux de variation

Théorème : Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

Alors, pour tous u et v tels que $u \neq v$, $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$.

Ce rapport est appelé taux de variation de f entre u et v; il traduit la proportionnalité des écarts des images de la fonction par rapport aux variables.

Exercice : Dans un repère, les points A et B ont pour coordonnées (-4 ; -1) et (2 ; 2).
Quelle est la fonction affine représentée par la droite (AB) ? Deux méthodes sont demandées.

Solution : La droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, donc elle représente une fonction affine. Notons f cette fonction et posons $f(x) = ax + b$. Il s'agit de déterminer a et b.

on a alors : $a = \dfrac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{-1 - 2}{-4 - 2} = \dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2}$.

Pour trouver b, on reporte a dans $y_A = f(x_A)$, d'où ici, $-1 = -4 \times \dfrac{1}{2} + b$. Il en résulte que $b = 1$.

L'autre méthode que l'on peut envisager consiste à reconnaître la nature de l'équation puis de dire que cette droite passe par A et par B.

c) Sens de variation

Théorème : Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.
Si $a > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soient u et v deux nombres réels tels que $u < v$.

$$f(u) - f(v) = au + b - (av + b) = a(u - v)$$

Si a est positif, alors $a > 0$ et comme $u - v < 0$, on déduit que $f(u) - f(v) < 0$ puis $f(u) < f(v)$
Donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Si a est négatif, alors $a < 0$ et comme $u - v < 0$, on déduit que $f(u) - f(v) > 0$ puis $f(u) > f(v)$
Donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Si $a = 0$ alors $f(u) = b$ pour tout u et f est constante.

II La fonction carrée

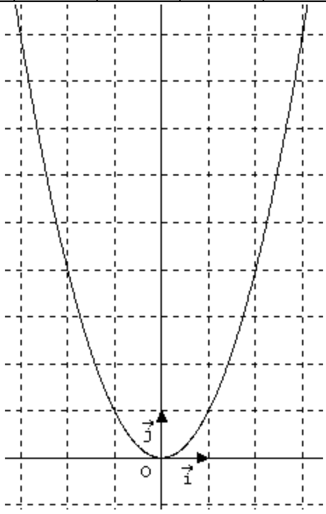
Il s'agit de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

a) Tracé point par point de la courbe représentative de *f*.

Etablir un tableau de valeurs en utilisant la calculatrice.

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	9	$\frac{25}{4}$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9

On peut alors tracer la courbe représentative de *f*.



La courbe représentative de *f* s'appelle une **parabole**.

b) Etude de la parité de *f*

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$.

Comparer $f(x)$ et $f(-x)$. : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

On dit que ***f* est une fonction paire.**

Graphiquement, cela signifie que les points $M(x ; f(x))$ et $M'(-x ; f(-x))$ qui sont des points de la courbe représentative de *f* sont symétriques par rapport à l'**axe des ordonnées**.

La représentation graphique de *f* admet donc l'**axe des ordonnées** pour **axe de symétrie**.

c) Sens de variation de *f*

D'après le graphique, on peut établir le tableau de variation de *f*.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗

f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Par le calcul : Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Si a et b sont positifs ou nuls, alors $a + b > 0$ et comme $a - b < 0$, on déduit que $f(a) - f(b) < 0$

Donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Si a et b sont négatifs ou nuls, alors $a + b < 0$ et comme $a - b < 0$, on déduit que $f(a) - f(b) > 0$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

III La fonction inverse

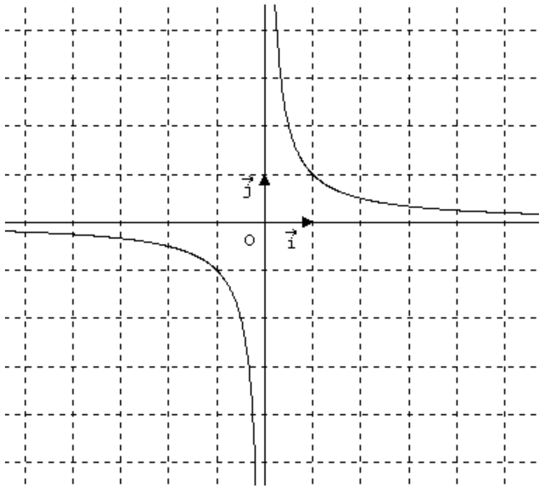
Il s'agit de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Tracé point par point de la courbe représentative de *g*

Tableau de valeurs :

x	-5	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	5
$g(x)$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

On peut alors tracer la courbe représentative de *g*.



La courbe représentative de *g* s'appelle une **hyperbole**.

b) Etude de la parité de *g*

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ alors $-x \in \mathbb{R}^*$.

Comparer $g(x)$ et $g(-x)$: $g(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -g(x)$.

On dit que ***g* est une fonction impaire**.

Graphiquement, cela signifie que les points $M(x\,;\,g(x))$ et $M'(-x\,;\,g(-x))$ qui sont des points de la courbe représentative de *g* sont symétriques par rapport à **l'origine du repère**.
La représentation graphique de *g* admet donc **l'origine du repère** pour **centre de symétrie**.

c) sens de variation de *g*

D'après le graphique, on peut établir le tableau de variation de *g*.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g		↘	‖	↘	

g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

Par le calcul : si a et b sont deux réels non nuls tels que $a < b$.

$$g(a) - g(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

Si a et b sont strictement positifs, $ab > 0$ et comme $b - a > 0$, on déduit que $g(a) - g(b) > 0$
Donc g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
Si a et b sont strictement négatifs, $ab < 0$ et comme $b - a > 0$, on déduit que $g(a) - g(b) > 0$
Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$.