Marc Roux - 2006

Terminale S – TP: Etude d'une transformation du plan complexe

1. Fiche élève.

φ est l'application qui, à chaque point M d'affixe z, fait correspondre M' d'affixe z',
$z'=\dfrac{20}{\bar{z}}$

1. Exprimer les coordonnées de M' en fonction des coordonnées de M.

2. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser une figure dans laquelle M est un point libre dans le plan, et M' est l'image de M par φ ; faire apparaître à l'écran l'affixe de M et celle de M'.

3. En déplaçant le point M à la souris, déterminer les points invariants par φ. Vérifier cette conjecture par un calcul.

4. a) Construire dans la figure précédente la droite d d'équation y = x + 4
   b) Déterminer expérimentalement l'image de d (ensemble des points M' lorsque M parcourt d).
   c) Déterminer expérimentalement l'ensemble des points M tels que M' soit sur d.

5. a) Construire dans la figure précédente le cercle *C* de centre 0, de rayon 10.
   b) Déterminer expérimentalement l'image de *C*.
   c) Déterminer expérimentalement l'ensemble des points M tels que M' soit sur *C*.

6. Déterminer de même les images de :
   a) Un cercle passant par O.
   b) Un cercle quelconque
   c) Une droite passant par O

2. Commentaires

Remarque : la transformation, dans le présent exemple, est une inversion ; mais l'élève n'a pas à le savoir, et n'a pas à utiliser la commande "inversion", présente dans les logiciels.

Eléments de réponses :

1. $x'=\dfrac{20x}{x^2+y^2}$, $y'=\dfrac{20y}{x^2+y^2}$

2. Méthode légèrement différente selon le logiciel employé;voir ci-dessous.

3. Par tâtonnements on conjecture que l'ensemble des points invariants est un cercle de centre 0, de rayon 4,5 environ; un calcul (très simple) montre que la valeur exacte du rayon est $\sqrt{20}$; pour le vérifier expérimentalement, construire ce cercle sur la figure, et placer M dessus.

4. b) Il est très facile, avec la fonction "trace", de voir que le lieu de M' est porté par un cercle; l'élève devra voir que ce lieu est le cercle *privé d'un point.*

c) Deux méthodes, d'inégale valeur :
- simple tâtonnement : on constate que, pour que M' reste sur d, il faut déplacer M sur un cercle
- (*pour cette transformation-ci)* s'apercevoir, par un calcul élémentaire, que $z = \varphi(z')$; placer M sur le cercle trouvé en b)
5. L'image de *C* est un cercle *C*'; mêmes remarques qu'en 3.
6. a) Une droite;
b) un cercle (faire remarquer que, quand le cercle donné passe de plus en plus près de O, le cercle image a un rayon de plus en plus grand, et "ressemble de plus en plus à une droite"
c) La droite elle-même

Figure GeoGebra : Les objets sont nommés automatiquement à mesure de leur création; pour changer leur nom et les rendre conformes à l'énoncé : clic droit sur l'objet, puis "renommer".
M est, au départ, un point libre dans le plan; pour 4. : clic droit sur M, "redéfinir", M=Point[d] ; de même en 5 : "redéfinir", M=Point[c] ; si on veut revenir à M libre : "redéfinir", M=(1,3) (ou tout autre couple de coordonnées) Attention, cette dernière manipulation sera refusée si le lieu de M' est tracé; l'effacer préalablement.
Pour 4.b), on peut aussi utiliser "lieu", clic sur M', clic sur M; mais dans ce cas l'élève risque de ne pas voir que le cercle est privé d'un point.
Pour affichage de l'affixe : Texte ; "z="+x(M)+"+"+y(M)+"i"

Figure Cabri : je ne dispose que de Cabri II ; avec Cabri II Plus, il y a peut-être des simplifications.
On place un point libre M, on affiche ses coordonnées; outil "calculatrice" :
$20*x/(x^2+y^2) \rightarrow$ résultat 1 ; $20*y/(x^2+y^2) \rightarrow$ résultat 2 ;
"report de mesure" : à partir de O, sur (Ox), on reporte résultat 1 : point *A*
à partir de O, sur (Oy), on reporte résultat 2 : point B
On construit la parallèle à (Oy) passant par *A*, la parallèle à (Ox) passant par B, leur intersection est M'
On peut alors cacher ces deux droites, ainsi que (facultatif) les coordonnées de M et de M'; préalablement on aura affiché les affixes en cliquant sur "texte", puis on tape z=(on clique sur l'abscisse)+(on clique sur l'ordonnée).i
On construit d, et *C*; on place un point sur d, un point sur *C*; pour placer M sur d: redéfinir un objet, clic sur M, on choisit "identifier à un autre objet", on clique sur le point de d; pour rendre M libre à nouveau : redéfinir, on choisit "point". On utilise "trace" et/ou "lieu" comme dans Geogebra.

Figure Geoplan
Créer un point libre dans le plan; créer (numérique, calcul géométrique) x et y abscisse et ordonnée de M; créer (numérique, calcul algébrique) $20x/(x^2+y^2)$, nommé x', $20y/(x^2+y^2)$, nommé y'; créer M' point repéré, de coordonnées (x', y'); créer la droite d, le cercle *C*.

On dispose ici de la fonction "trace", mais pas de "lieu"; je n'ai pas trouvé de moyen de faire afficher les affixes (mais seulement les coordonnées)
Pour placer M sur d : créer point libre sur une droite : droite d, le nommer M ; à "voulez-vous redéfinir M?", répondre oui; idem pour le placer sur C, etc.

3. Autres exemples.

La définition de φ peut varier à l'infini; les questions seront globalement semblables, mais devront être adaptées à chaque cas ; à titre d'exemple, je joins la figure GeoGebra correspondant à $z' = z^2$: outre les deux points invariants facilement obtenus par calcul, on y découvre que l'image d'une droite semble être une parabole, et que celle d'un cercle ressemble fortement à une cardioïde !
On pourra aussi choisir pour φ une transformation étudiée en cours (rotation, homothétie,…, similitude en spécialité); on pourra alors demander de la reconnaître et de déterminer ses caractéristiques.

4. Intérêt pédagogique.

C'est essentiellement de rendre concrètes, aux yeux de l'élève, les notions de transformation géométrique, de point invariant, d'image d'un ensemble de points, de lieu géométrique… Les nombres complexes doivent mieux apparaître comme un outil pour faire de la géométrie. Depuis que j'utilise l'ordinateur pour illustrer ces notions, il me semble que certains arrivent à dépasser l'aspect purement calculatoire des exercices sur les complexes, et à leur donner du sens.

5. Modalités d'évaluation.

L'évaluation devrait être faite au fur et à mesure de l'épreuve : l'examinateur, après un temps raisonnable, note si chaque étape a été franchie ; si nécessaire il donne des indications, voire la réponse, pour éviter le blocage et permettre la recherche des questions suivantes. A titre indicatif, chaque tâche, en cas de réalisation sans aide, pourrait donner les points suivants (en cas de réalisation avec aide, on pourra donner une fraction des points) :

- Question 1 : 0,5 point
- Question 2 : 1 point
- Question 3 : 1 point (dont 0,5 pour le calcul)
- Question 4 : 0,5 point
- Question 5 : 0,5 point
- Question 6 : 0,5 point

Le total (sur 4 points) sera arrondi, en tenant compte de l'activité du candidat, de ses éventuelles recherches, fausses pistes, etc.