

Chapitre I

Nombres, Calculs, Equations

I) Les différents ensembles de nombres

- $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;\dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels
- **Les entiers relatifs** sont les entiers naturels et leurs opposés $\mathbb{Z} = \{\dots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\dots\}$
- \mathbb{D} désigne **les décimaux** ex : -0,1 1 ; -3 ; -4,58 ; 3;02589

$$\frac{1}{2} = 0,5 : \text{c'est un décimal} \quad \left(\text{par contre } \frac{1}{3} = 0,3333\dots \text{ n'est pas un décimal} \right)$$

Tout décimal peut s'écrire en fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

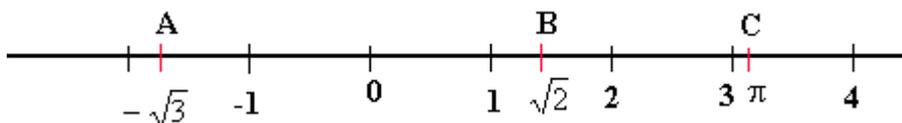
$$\text{ex } 0,8732 = \frac{8732}{1000} = \frac{8732}{10^3}$$

- **Les rationnels** ensemble désigné par \mathbb{Q} , sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction (quotient de 2 entiers) : $\frac{5}{7} - \frac{4}{19} 5$ (par contre $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel)

Tout nombre décimal est rationnel ($0,832 = \frac{8732}{1000} = p/q$) mais les nombres rationnels ne sont pas forcément décimaux, ex $2/3$

Certains nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de quotient : les irrationnels. L'ensemble des irrationnels et des rationnels constitue l'ensemble **des réels**, noté \mathbb{R} .

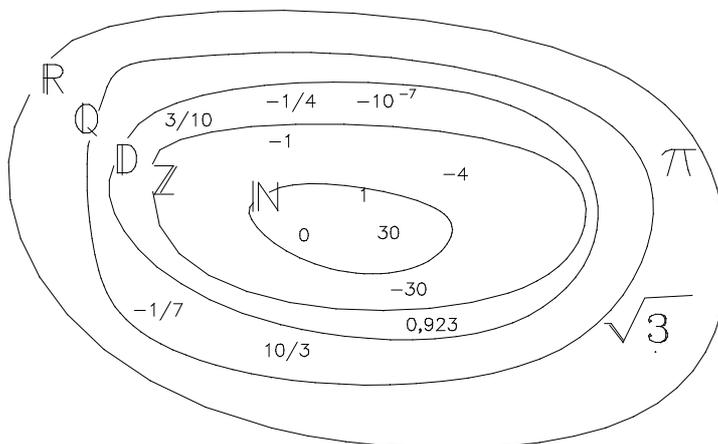
Toute les réels sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée



Remarques :

Tout élément de \mathbb{N} est aussi un élément de \mathbb{Z} . On dit que \mathbb{N} est inclus dans \mathbb{Z} et on écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

De même, on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



II) Règles de calcul

1) Quotients

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}, b \neq 0$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad b \text{ et } d \text{ non nuls}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b \text{ et } d \text{ non nuls}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}, \quad b, c \text{ et } d \text{ non nuls}$$

2) Puissances

Pour tout nombre a et tout entier naturel non nul n , la puissance n -ième de a est $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \times n} \quad (ab)^n = a^n b^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Il n'y a pas de règle avec $a^m + a^n$

3) Racines

Tout nombre positif ou nul possède une racine carrée. C'est le nombre positif noté \sqrt{a} , tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\text{Si } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\text{Si } a \geq 0 \text{ et } b > 0 \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Il n'y a pas de règle avec $\sqrt{a+b}$

(astuce $\sqrt{a} = a^{1/2}$)

4) La notation scientifique

Définition

Tout nombre décimal positif A peut s'écrire sous la forme $A = a \times 10^p$ où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p est un entier relatif.

L'écriture $a \times 10^p$ est appelée **notation scientifique** de A .

Exemples : $5430 = 4,43 \cdot 10^3$ $0,06751 = 6,751 \cdot 10^{-2}$

III) Les nombres premiers

1) Définition

On dit qu'un entier naturel est un **nombre premier** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

Ex: 0 n'est pas un nombre premier puisqu'il est divisible par tous les entiers strictement supérieurs à 1
 1 n'est pas un nombre premier car il n'est divisible que par lui-même (soit 1 donc un seul diviseur)
 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71 ...sont des nombres premiers
 Par contre, $12 = 3 \times 4$ donc 12 n'est pas premier.

2) Comment reconnaître si un nombre est premier ?

Propriété

Si un entier n n'admet aucun diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$ alors n est premier.

ex : 97 n'est pas divisible par 2 car il n'est pas pair

97 n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres ne l'est pas

97 n'est pas divisible par 5 car son dernier chiffre n'est pas 0 ou 5

97 n'est pas divisible par 7 car $97 = 7 \times 16 + 6$. Le reste n'est pas nul.

Et, comme $11^2 > 97$, il est inutile d'examiner d'autres cas.

3) Décomposition d'un nombre en produit de nombres premiers.

Tout entier naturel supérieur à un qui n'est pas premier peut se décomposer en un produit de nombres premiers.
 Cette décomposition est unique.

Ex: décomposons 72 :

Au brouillon :	Sur la copie :
$\begin{array}{r l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$72 = 2^3 \times 3^2$

4) PGCD de deux entiers.

Le PGCD (plus grand commun diviseur) de deux entiers a et b est le produit de tous les facteurs premiers communs aux deux décompositions de a et de b .

$\begin{array}{r l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 2160 & 2 \\ 1080 & 2 \\ 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$
--	--

$$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \text{ et } 2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5 \text{ donc } \text{PGCD}(2520, 2160) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

$$\text{Ainsi, } \frac{2520}{2160} = \frac{360 \times 7}{360 \times 2 \times 3} = \frac{7}{6}$$

IV) Factoriser une expression

Factoriser une expression, c'est chercher à la transformer en un produit ou un quotient de facteurs si possible du 1^{er} degré. Pour cela, 3 possibilités à essayer dans l'ordre :

1) Chercher un facteur commun

$$\begin{aligned} A(x) &= (4x - 3)(x + 2) - x(8x - 6) - 4x + 3 \\ &= (4x - 3)(x + 2) - 2x(4x - 3) - (4x - 3) \\ &= (4x - 3)[x + 2 - 2x - 1] \\ &= (4x - 3)(1 - x) \end{aligned}$$

2) Chercher une identité remarquable

$$\begin{aligned} B(x) &= 32x^2 - 48x + 18 \\ &= 2(16x^2 - 24x + 9) \\ &= 2(4x - 3)^2 \end{aligned}$$

3) Chercher à faire apparaître un facteur commun ou une identité remarquable en développant ou en regroupant les termes de façon réfléchie.

$$\text{ex : } C(x) = (3x - 1)^2 - (3x - 2)(3x + 1) = \dots = -3x + 3 = 3(-x + 1)$$

$$\text{ex : } D(x) = x^2 - 9 - (4x - 12)x = (x - 3)(x + 3) - 4(x - 3)x = (x - 3)(x + 3 - 4x) = (x - 3)(3 - 3x) = 3(x - 3)(x + 1)$$

V) Equations

1) Equations de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$

Propriété :

Pour deux réels A et B , $AB = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple : Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $(3x + 2)(2x - 5) = 0$

$$3x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = 0$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2}$$

$$\text{L'ensemble des solutions est } S = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{5}{2} \right\}$$

2) Equation de la forme $x^2 = a$ ($a > 0$)

Théorème :

a est un réel strictement positif donné. L'équation $x^2 = a$ admet deux solutions, \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$

Démonstration :

$$x^2 = a \text{ équivaut à } (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0 \text{ donc équivaut à } x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Exemple : Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $(x - 1)^2 = 3$

$$(x - 1)^2 - 3 = 0 \text{ et remarquons que } 3 = (\sqrt{3})^2 \text{ on obtient :}$$

$$(x - 1)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$[(x - 1) + \sqrt{3}][x - 1 - \sqrt{3}] = 0$$

$$x - 1 + \sqrt{3} = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 - \sqrt{3} = 0$$

$$x = 1 - \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = 1 + \sqrt{3}$$

$$S = \{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$$

3) Equation de la forme $\frac{A}{B} = 0$

Propriété :

Pour deux réels A et B l'équation $\frac{A}{B} = 0$ équivaut à $A = 0$ et $B \neq 0$

Exemple : Résoudre, dans \mathbb{R} , $\frac{2x+3}{3x-5} = 0$

Le quotient $\frac{2x+3}{3x-5}$ n'existe que si le dénominateur est non nul c'est à dire si $3x - 5 \neq 0$

ou encore $x \neq \frac{5}{3}$

$\frac{5}{3}$ est une valeur interdite.

$$\frac{2x+3}{3x-5} = 0 \text{ ssi } 2x+3 = 0 \text{ (avec } x \neq \frac{5}{3}\text{)}$$

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$S = \{-\frac{3}{2}\}$ (on vérifie que la solution obtenue n'est pas une valeur interdite)

4) Equivalences

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions et seulement les solutions de cette équation.

C'est la raison pour laquelle nous procéderons toujours par équivalences successives en nous appuyant sur les propriétés suivantes :

A, B, C étant des réels quelconques, on a :

$$A = B \Leftrightarrow A + C = B + C \quad (1)$$

$$A = B \Leftrightarrow A - C = B - C \quad (2)$$

$$\underline{\text{Si } C \neq 0 \text{ alors}} : A = B \Leftrightarrow AC = BC \quad (3)$$

$$\underline{\text{Si } C \neq 0 \text{ alors}} : A = B \Leftrightarrow \frac{A}{C} = \frac{B}{C} \quad (4)$$

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0 \quad (5)$$

Ex: Résoudre dans \mathbb{R} , (E) : $3x^2 = 9x$

Méthode fausse :

$$(E) \Leftrightarrow 3x = 9$$

$$(E) \Leftrightarrow x = 3$$

$$S = \{3\}$$

← $cf(4)$

$cf(4)$

Equivalence fausse :

On a divisé les 2 membres de (E) par x qui peut être nul !

Méthode juste :

$$(E) \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0 \quad cf(2)$$

$$(E) \Leftrightarrow 3x(x-3) = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow 3x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \quad cf(5)$$

$$(E) \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3 \quad cf(4) \text{ et } (1)$$

$$S = \{0 ; 3\}$$

5) Conditions sur x

Avant de transformer l'équation pour la résoudre, il faut commencer par éliminer les valeurs de x qui sont

"interdites" car : Elles annulent un dénominateur

Elles rendent strictement négatif un radicande.

Exemple	Méthode
<p>Résoudre dans \mathbb{P} : (E) $\frac{3x^2}{x+1} = \frac{6x^2 - 4x}{(3x-2)(x+1)}$</p> <p>Conditions : $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ (3x-2)(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3}$</p> <p>(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2}{x+1} - \frac{6x^2 - 4x}{(3x-2)(x+1)} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$ cf (2)</p> <p>(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2}{x+1} - \frac{2x(3x-2)}{(3x-2)(x+1)} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$</p> <p>(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2}{x+1} - \frac{2x}{x+1} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$</p> <p>(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x}{x+1} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$</p> <p>(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(3x-2)}{x+1} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$</p> <p>(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x(3x-2) = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$ cf (3)</p> <p>(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } 3x - 2 = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$ cf (5)</p> <p>(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3} \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$ cf (1) et (4)</p> <p>(E) $\Leftrightarrow x = 0$</p> <p style="text-align: center;">$S = \{0\}$</p>	<p>Avant toute chose, penser aux conditions</p> <p>Ensuite, à chaque étape, penser à l'équivalence et réécrire les conditions</p> <p>Factoriser en un produit nul ...</p> <p>... pour utiliser la propriété : Un produit est nul ssi l'un des facteurs est nul</p> <p>Conclure par $S = \dots$</p>

SIMPLIFIER DES FRACTIONS, DES PUISSANCES ET DES RACINES

I) Fractions :

$$A = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{3} - 3 \right)$$

$$B = 3^{-2} + \frac{\left(\frac{1}{2} + 1 \right)^2}{\frac{5}{4}}$$

$$C = \frac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{3}{2} + 1} \times \frac{5^3}{18}$$

$$D = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \times \frac{1}{3 - \frac{3}{2}}$$

$$E = \frac{\frac{7}{6} - \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} - 2} \times \frac{81}{50}$$

$$F = \frac{2+3}{2+7} \div \left(\frac{5}{3} \right)^2$$

$$G = \frac{7}{18} \times \frac{2}{7} - \left(\frac{5}{3} - 1 \right)^2 + 1$$

$$H = \frac{\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4} \right)^2}{\frac{5}{8} - \frac{8}{3}}$$

$$I = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{14} - 2 \times \frac{4}{14}$$

$$J = \frac{1 - \frac{1}{3}}{5 + \frac{1}{3}} \times \frac{\frac{1}{4} - 3}{2}$$

$$K = \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}} \div \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{4}{5} + \frac{3}{4}}$$

$$L = \frac{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$$

$$M = \frac{-5 + 3^2 \times 2 + 4}{12 \times 2 + 10}$$

$$N = \frac{2}{a+1} + \frac{1 - \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}} \quad \begin{matrix} (a \neq 0) \\ (a \neq -1) \end{matrix}$$

II) Puissances :

$$A = \frac{49 \times (-2)^5 \times (-3)^{-2}}{-7^3 \times 16 \times 3^{-3}}$$

$$B = \frac{(-5)^4 \times 7^2 \times (-2)^{-3}}{(-4)^4 \times (-1)^5 \times 25}$$

$$C = 0,0000000005 \times 1004000000$$

$$D = \frac{2^3}{3^4} \div \frac{2^2}{3^5}$$

$$E = \left(\frac{4^{-2} \times 8^4}{90^7 \times 30^{-2}} \right)^3$$

$$F = \left[\frac{5^5 \times 24^{-3}}{(100^{-7} \times 15^6)^4} \right]^2$$

$$G = \frac{2^2 \times 10^{-10} \times 2^7 \times 10^{-6}}{32 \times 10^{-15}}$$

$$H = \frac{5^3 \times 3^8 \times 5^2}{125 \times 5^2 \times 81 \times 7^0}$$

$$I = \frac{0,09 \times 7 \times 10^{-1} \times 250}{14 \times 10^3 \times 0,5 \times 10^{-2}}$$

$$J = \frac{(56^8 \times 81^{-2} \times 25^7)^3}{(50^5 \times 700^3)^4}$$

$$K = \frac{0,04 \times 2^{-2} \times (10^{-2})^3 \times 10^2}{3 \times 10^{-8} \times 10^{-2}}$$

$$L = \frac{25 \times (10^2)^{-5} \times 121}{11 \times 75 \times 10^{-9}}$$

$$M = \frac{9^{n+1} + 9^n}{3^{2n+1} - 3^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$N = \left[\frac{(a^2 b^4)^2}{a^3} \right]^{-3} \quad \begin{matrix} (a \neq 0) \\ (b \neq 0) \end{matrix}$$

$$O = \frac{(a^2 b)^3}{(-a)(-b)^2} \quad \begin{matrix} (a \neq 0) \\ (b \neq 0) \end{matrix}$$

$$P = \left(\frac{a^3 b^{-2}}{a^4 b^{-3}} \right)^{-2} \times \frac{(3a^2 b^3)^3}{(2^{-1} ab)^2} \quad \begin{matrix} (a \neq 0) \\ (b \neq 0) \end{matrix}$$

$$Q = \frac{(ab^2)^2 (ab^{-1})^3 (a^2 b)^{-2}}{a^2 c^{-5} (a^{-1} bc^2)^3} \quad \begin{matrix} (a \neq 0) \\ (b \neq 0) \\ (c \neq 0) \end{matrix}$$

$$R = \frac{(ab^{-2} c^3)^4 (a^4 b^5 c^{-6})^{-2}}{(a^{-7} b^8 c^7)^3 (a^6 b^5 c^4)^2} \quad \begin{matrix} (a \neq 0) \\ (b \neq 0) \\ (c \neq 0) \end{matrix}$$

III) Racines :

$$A = \sqrt{2} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{50}$$

$$B = \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$C = \frac{2\sqrt{21}\sqrt{75}}{\sqrt{35}\sqrt{20}}$$

$$D = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+2}$$

$$E = \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2$$

$$F = (\sqrt{2} + \sqrt{7})^3$$

$$G = (2 + \sqrt{3})^2 + (1 - 2\sqrt{3})^2$$

$$H = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$I = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{20}}{\sqrt{45} \left(2 - \frac{5}{6} + \frac{4}{3} \right) (1 - \sqrt{3})}$$

$$J = (4 + 3\sqrt{2})^2 - (2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$$

$$K = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$L = \sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}}$$

$$M = \frac{\sqrt{0,04}}{\sqrt{0,0016}} + \frac{\sqrt{0,01}}{\sqrt{0,04}}$$

$$N = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}} \right)^2$$

$$O = \sqrt{\frac{2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6}{5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2}}$$

$$P = \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{\frac{4\sqrt{27}}{3\sqrt{3}}}}}}}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{48a^6 b^{12}}{243(ab)^4}} \quad \begin{matrix} (a \neq 0) \\ (b \neq 0) \end{matrix}$$

$$R = \sqrt{\frac{4^{80} + 5 \times 8^{53}}{28 \times 2^{155}}}$$

Calcul algébrique et équations

Développer, réduire et ordonner :

$$A(x) = -3x^2(x + 2)$$

$$B(x) = (x + 2)(x^2 - 3x + 1)$$

$$C(x) = (x + 3)(x - 3) - x(1 - 2x)$$

$$D(x) = (a + 2b)^2 - 4ab$$

Reconnaître un facteur commun et factoriser

$$A(x) = x^3 - 3x^2$$

$$B(x) = -6a^2b + 15ab^3$$

$$C(x) = x(x + 1) - 2(x + 1)^2$$

$$D(x) = 14a^3b^2 - 21a^2b^3$$

$$E(x) = (x - 2)^2 - 3x(x - 2)$$

Faire apparaître un facteur commun puis achever la factorisation

$$A(x) = (x + 1)^2 + x^2 + x$$

$$B(x) = (x + 3)^2 + 4x + 12$$

$$C(x) = (x - 1)(x - 2) - 3x + 6$$

$$D(x) = 5x^2 - x^3 + (x - 5)^2$$

Factoriser chacun des produits remarquables suivants :

$$A(x) = 9 - x^2$$

$$B(x) = 4x^2 - 25$$

$$C(x) = x^2 - 2$$

$$D(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

$$E(x) = x^2 + 14x + 49$$

Résoudre chaque équation produit

$$(2x + 1)(x - 5) = 0$$

$$x^2(3x - 1) = 0$$

$$(1 - x)(2 - 7x) = 0$$

$$x(x + 1)(x + 2) = 0$$

Ramener à une équation produit

$$(3x + 1)(x - 2) = x^2 - 4$$

$$2x(x - 5) = x^2 - 25$$

$$(3x + 2)^2 - x^2 = 0$$

Avec des quotients

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = 2$$

$$\frac{x^2 - 4}{2x^2 + 4x} = 0$$

$$\frac{2x + 3}{5x - 1} = 2$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{2x - 3} = \frac{1}{2}$$

Factoriser

$$A = x^2 - 3x + 2$$

$$B = -9x^2 - 6x - 1$$

$$C = -10 + (x+5)^2 - 2x$$

$$D = -2x^2 + x + 1$$

$$E = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$$

$$F = x^2 - 2$$

$$G = 4x^2 - 12x + 8$$

$$H = x - (3x-1)^3 + 2x - 1$$

$$I = (x^4 - 1)(x^2 + 2x + 1)$$

$$J = x^2 - 9 - (2x - 6)x + (x - 3)^2$$

$$K = (x - 11)^2 + (33 - 3x)(x + 2)$$

$$L = (2x - 1)x + (1 - 2x)^2 + (x - 1/2)(x - 3/2)$$

$$M = x^2(1 + 1/x) + 2(x + 1)^2$$

$$N = -0,3(2x - 3)^2 + 0,7x(1,5 - x)$$

$$O = 0,25x^2 - x + 1$$

$$P = x^2 - (x + 1)^2$$

$$Q = 5(1 - x)^2 - 45x^2$$

$$R = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1$$

$$S = x^5 + 4x^4 + 4x^3$$

$$T = (5x - 1)(x + 3) + 3(25x^2 - 1)$$

$$U = 49 - 28x + 4x^2 + (7 - 2x)(5 - 3x)$$

$$V = x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + x - 4$$

$$W = x^2 + 6x + 5$$

$$X = 3x^2 + 7x + 2$$

$$Y = -2x^2 - x + 1$$

$$Z = 2x^2 - 3x + 1$$

RÉSOUTRE DANS \mathbb{R}

$$A: (0,1x-1)(0,2x-2)(0,3x-3)(0,4x-0,4)=0$$

$$B: \frac{2x+3}{5x-1} = 2$$

$$C: 4\sqrt{7}x - 0,8 = 2\sqrt{7} - 1,6x$$

$$D: \frac{3}{x} = \frac{x}{5}$$

$$E: (x-2)^2 = \frac{1}{16}(5-2x)^2$$

$$F: \frac{x - \frac{4}{x}}{x-2} = \frac{x+2}{x}$$

$$G: (x+1)(3-2x) = 4x^2 - 9$$

$$H: \frac{x^2}{1-2x} = -1$$

$$I: (x+2)^2 = 2(x^2-4)$$

$$J: \frac{x^2+x+1}{2x-3} = \frac{1}{2}$$

$$K: \frac{x^2-2x+1}{x-1} = 0$$

$$L: x^3 - x = 2x^2 - 2$$

$$M: \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$$

$$N: x^2 - x - 1 = 0$$

$$O: \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

$$P: \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2$$

$$Q: (x^2-9)(2x+1) = (x+3)(2x+1)^2$$

$$R: \frac{2}{x-1} = 1 - \frac{x}{x+1}$$

$$S: (2x+5)^2 - 2(7x+4) = 4(x+3)^2 - 1$$

$$T: \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$$

$$A: x^2 - x - \frac{3x}{x+1} = 0$$

$$B: \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-x}$$

$$C: \frac{x^2-2}{x^2-1} = 0$$

$$D: \frac{9x^2-4}{(3x+2)^2} = 0$$

$$E: \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = 0$$

$$F: \frac{x^3-2x^2+x}{x} = 0$$

$$G: (2x+1)^2 - 3(x+\frac{1}{2}) = 0$$

$$H: 4 = (x\sqrt{2}-1)^2$$

$$I: \frac{x+1}{x} = \frac{x-2}{x+1}$$

$$J: \frac{2x}{x+1} = \frac{x+1}{8x}$$

$$K: 5x^4 = 10x^3 - 5x^2$$

$$L: \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{3}{x+2} - \frac{3}{x-2}$$

FICHE DE REVISIONS

I Terminologie

L'opposé de x est

L'inverse de x est

Ex : Donner l'opposé puis l'inverse de chacun de ces nombres :

$$a = \pi \quad b = \frac{3}{7} \quad c = \frac{11}{3} \quad d = -2 \quad e = \frac{1}{4} \quad f = \sqrt{2}$$

II Opérations, Fractions

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \dots\dots\dots$$

Ex : Calculer les nombres suivants :

a) $-5 - 2$

b) $3 - 7$

c) $3 + 5 : 5 + 3$

b) $3 + \frac{1}{3}$

e) $-\frac{3}{2} + \frac{5}{4}$

f) $\frac{2}{3} - \frac{3}{2}$

g) $9 \times \frac{35}{9}$

h) $\frac{4}{5} \times \frac{2}{5}$

i) $\frac{7}{5} : \frac{3}{10}$

j) $-\frac{4}{5} : 5$

k) $-\frac{4}{9} : \left(-\frac{3}{2}\right)$

l) $\frac{1}{3} + \frac{7}{3} \times \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{7}\right)$

III Puissances

$$a^n = \dots\dots\dots$$

$$a^{-n} = \dots\dots\dots$$

$$a^m \times a^n = \dots\dots\dots$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \dots\dots\dots$$

$$(a^m)^n = \dots\dots\dots$$

$$(ab)^n = \dots\dots\dots$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \dots\dots\dots$$

Ex : Simplifier les nombres suivants :

a) $(-2)^3$

b) 5^2

c) 3×2^3

d) $4^2 \times 4^5 \times (4^3)^2$

e) $(9^3)^7$

f) $\frac{2^{12}}{2^5}$

g) $7^{12} \times 2^{12}$

h) $\frac{(2^5)^5}{(2^4)^6}$

i) $\frac{3^3 \times 7^4 \times (3^2)^3}{3^8 \times (7^2)^2}$

j) $\frac{30 \times 10^{-7} \times 2 \times 10^{12} \times 4 \times 10^{-2}}{6 \times 10^{11} \times 200 \times 10^{13}}$

k) $\left(-\frac{5}{8}\right)^8 \times \left(-\frac{25}{9}\right)^{-4}$

l) $(3a^4b^3) \times (8ab^2)$

IV Racines carrées

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{a^2} = \dots\dots\dots$$

Attention : $\sqrt{a+b} \neq \dots\dots\dots$

Ex : Simplifier les nombres suivants :

a) $\sqrt{136^2}$

b) $\sqrt{\frac{81}{36}}$

c) $\sqrt{81 \times 7^2}$

d) $2\sqrt{5} + 2\sqrt{125} - 7\sqrt{45}$

e) $-2\sqrt{72} + 4\sqrt{98}$

f) $\sqrt{75} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{27}$

g) $\sqrt{144 \times 36 \times 12}$

h) $\sqrt{\frac{16}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{50}}$

i) $\sqrt{8} \times \sqrt{72} \times \sqrt{125}$

j) $(2\sqrt{3} - 2)^2$

k) $(2\sqrt{3} + 5)^2 + (1 - \sqrt{5})^2$

l) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})$

V Développement et réduction

Ex : Développer et réduire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 a) x(2x+1) & b) 3x(-2x+2) & c) 5x^2(x+7) & d) \frac{-4x}{3}(-6x+9) \\
 e) 3(2x+1)(-x) & & & \\
 f) (5x-2)(2x+3) & g) 2x^2(x^2+5x+9)-2x^2-15x & h) \left(\frac{4}{5}-2x\right)\left(2x+\frac{4}{5}\right) & i) 5(2x-8)(1+3x) \\
 j) (5-2x)(2x+1)+(10-4x)(x-3) & k) (3x+4)(4-3x)+(2x+1)(x-2) & l) \frac{4x+1}{5}(3x+2) &
 \end{array}$$

VI Identités remarquables

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \dots\dots\dots \quad (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \dots\dots\dots \quad \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = \dots\dots\dots$$

Ex : Développer et réduire les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 a) (x+5)^2 & b) (5x-3)^2 & c) (3x+7)(3x-7) & \\
 d) (3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}) & e) (2-\sqrt{3})^2 & f) (\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 & \\
 g) (101)^2 & h) \left(\frac{x}{2}-2\right)^2 & i) \left(-3x-\frac{1}{3}\right)^2 & \\
 j) \left(3x+\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right) & k) \left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}\right)^2 & l) (-2x+0,5)^2 &
 \end{array}$$

VII Factorisation

Ex : Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 a) 2a+2b-2c & b) 3x+xy & c) xy^2+x^2y & \\
 d) x^2+2x+1 & e) a^2-12a+36 & f) x^2-100 & \\
 g) 4+8x+4x^2 & h) 25-x^2 & i) 16x^2-121 & \\
 j) (3x+1)(5x+3)+(3x+1)(2x+2) & k) (5x+11)(4y-1)+(5x+11)(3y+2) & l) (x-2)^2-3(x-2) & \\
 m) (x+1)(2x+1)+(x+1)(x+2)+3(x+1) & n) (x-4)^2+(3x-12)(x+3)-2(x-4) & &
 \end{array}$$

VIII Equations

Ex : Résoudre les expressions suivantes :

Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 a) (x-1)^2 = -5x+5 & b) (x-2)^2 = \frac{1}{16}(5-2x)^2 \\
 c) \frac{x^2-4}{2x^2+4x} = 0 & d) 3x^2 = 18x \\
 e) 7x(5-x) = (x+1)(x-5) & f) \frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}
 \end{array}$$

FICHE DE REVISIONS

1) 1) Donner la définition d'un nombre rationnel

2) Prouver que les nombres suivants sont rationnels :

$$A = -5 \quad B = \sqrt{\frac{16}{49}}$$

2) Exprimer plus simplement les expressions suivantes :

$$A = \frac{(-2)^7 \times (-6)^5 \times 9^5}{18^6 \times (-12)^3}$$

$$B = \frac{4 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$C = \frac{\sqrt{8} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

3) Calculer $A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$

4) Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$, b étant le plus petit possible :

$$A = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180}$$

$$B = \sqrt{\frac{4}{5}} \times \sqrt{\frac{27}{16}} \times \sqrt{\frac{2}{3}}$$

5) Factoriser chacune des expressions suivantes :

$$A(x) = 2x^2 + 3x(x - 4)$$

$$B(x) = 16x^2 - 8x + 1$$

$$C(x) = (2 - 5x)(x + 7) + (8 - x)(5x - 2)$$

$$D(x) = \frac{1}{25} - 4(3 + x)^2$$

6) Calculer les réels suivants et mettre le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$A = \frac{25}{3} + \frac{5}{7} - \frac{13}{\frac{7}{9}} \quad B = \frac{(-25)^3 \times (-2)^9 \times (-49)^2}{35^2 \times 14^5} \quad C = \frac{7 + \frac{3}{5}}{2 - \frac{1}{5}}$$

$$D = 6\sqrt{50} + 8\sqrt{18} - 5\sqrt{32} \quad E = \frac{3 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

7) Factoriser chacune des expressions suivantes en produit de facteurs du premier degré :

$$A = 6x(x - 2) - 3x^2(x - 2)$$

$$B = 3x(x + 3) - 4(x + 3)$$

$$C = (6 + x)(3 - 4x) + (4x - 3)(3x + 4)$$

$$D = (5x + 1)^2 - 9x^2$$

$$E = (2x - 3)^2 - (x + 5)(3 - 2x) - (4x^2 - 9)$$

$$F = (3x + 7)^2 - 4(5x - 1)^2$$

$$G = (5x + 1)^2 + (5x + 1)(2x + 4) + (x + 2)^2$$

8) a et b étant deux nombres réels, établir les identités remarquables qui caractérisent :

$$(a+b)^3 \text{ et } (a-b)^3.$$

$$(a+b+c)^2 \text{ et } (ab+bc+ca)^2$$

9) Calculer $X+Y$, $X-Y$, XY et $\frac{X}{Y}$ avec :

$$X = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) ; Y = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \text{ et } R = \sqrt{2}.$$

10) Soit le réel $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$. Déterminer la valeur du réel α tel que $\alpha = x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1+16\sqrt{7}}{9}$

11) Sans utiliser de calculatrice, montrer que le nombre A tel que :

$$A = \frac{(0,2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} : \frac{8^3 \times 15}{12^5} \text{ est un nombre entier.}$$

12) Résoudre le problème suivant posé "en vers" ...

Au grand soleil, je viens de mettre
La lance de mon étendard.
Sa longueur vaut trois fois le mètre,
Son ombre a cinq mètres un quart.

Eh bien ! la tour de cette église
Par son ombre nous marque cent.
Dis nous la hauteur précise
De ce clocher retentissant !
(*Comptes et contes - 1780*)

FICHE DE REVISIONS

1) 1) Donner la définition d'un nombre rationnel

2) Prouver que les nombres suivants sont rationnels :

$$A = -5 \quad B = \sqrt{\frac{16}{49}}$$

2) Exprimer plus simplement les expressions suivantes :

$$A = \frac{(-2)^7 \times (-6)^5 \times 9^5}{18^6 \times (-12)^3} \quad B = \frac{(-25)^3 \times (-2)^9 \times (-49)^2}{35^2 \times 14^5} \quad C = \frac{7 + \frac{3}{5}}{2 - \frac{1}{5}}$$

$$D = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}} \quad E = \frac{25}{3} + \frac{12}{7} - \frac{13}{9}$$

3) Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$, b étant le plus petit possible :

$$A = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180}$$

$$B = \sqrt{\frac{4}{5}} \times \sqrt{\frac{27}{16}} \times \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$D = 6\sqrt{50} + 8\sqrt{18} - 5\sqrt{32}$$

4) Sans utiliser de calculatrice, montrer que le nombre A tel que :

$$A = \frac{(0,2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} : \frac{8^3 \times 15}{12^5} \text{ est un nombre entier.}$$

5) Ecrire sous forme d'un entier (sans utiliser la calculatrice)

$$a = 2^{(3^2)} \quad b = (2^3)^2 \quad c = 2^{(2^3)} \quad d = \frac{3^5}{3^3} \quad e = 4^2 \times 4 \quad f = \frac{3^4}{9^2} \quad g = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times (-2)^4 \quad h = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^5} \times 2^5$$

6) Ecrire sous forme de fraction irréductible (ne pas oublier de simplifier au cours des calculs chaque fois que cela est possible)

$$a = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad b = \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{9}\right)^2 \quad c = \frac{14^2 \times 9^3}{3^5 \times 7} \quad d = \frac{15^3 \times 4}{6^2 \times 5^3} \quad e = \frac{(-18)^2 \times 5}{15^2 \times 3}$$

7) Ecrire plus simplement chacun des nombres suivants :

$$a = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2}\right) \quad b = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}} \quad c = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right) \times \frac{2 - \frac{4}{7}}{3} \times \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}} \quad d = \frac{\frac{1}{1 - \pi} - \frac{1}{1 + \pi}}{1 + \frac{1}{\pi^2 - 1}}$$

Utiliser sa calculatrice graphique pour le CALCUL NUMERIQUE

Touche "(-)" ou "+/-" : **En mathématiques, le signe moins peut avoir deux significations tout à fait différentes :**

Soit il indique une soustraction et il faut utiliser la touche "-" de la calculatrice : $3 - 2 = 1$

Soit il indique l'opposé d'un nombre et il faut utiliser la touche "(-)" ou "+/-" : $3 \times (-2) = -6$

Ex : Dans les expressions suivantes, distinguez les soustractions des opposés, puis vérifiez les calculs avec votre machine : $-5 + 3 = -2$ $-5 - 3 = -8$ $2(-3) - (-1) + 2 = -3$ $\frac{1}{-3} = -0,333\dots$

Quotients : **Pour calculer un quotient à la machine, il faut commencer par le transcrire sur une seule ligne en délimitant le numérateur et le dénominateur par des parenthèses. Ainsi :** $\frac{3 \times 2 + 5}{2 + 3}$ devient $(3 \times 2 + 5) \div (2 + 3)$

Ex : Vérifier avec votre machine :

$$\frac{3 \times 2}{3 \times 4} = 0,5 \quad 3 \times \frac{1}{3 \times 2} \times 2 = 1 \quad 3 \times \frac{2 + 5}{7} = 3$$

Comment la machine interprète-t-elle :

$$3 \times 2 \div 3 \times 2 = \quad 2 + 3 \div 5 =$$

Racines : **Il n'est pas possible de prolonger la barre de racine sur une calculatrice. Il faut donc utiliser des parenthèses pour délimiter le radicande :** $\sqrt{2 \times 2}$ devient $\sqrt{(2 \times 2)}$

Ex : Vérifier avec votre machine : $\sqrt{3 \times \frac{1}{3}} = 1$ $\sqrt{-3 + 7} = 2$ $\sqrt{2} \sqrt{2 \times 9} \times 2 = 12$ $\sqrt{1 + 2\sqrt{4^2}} = 3$

Puissances autres que 2 et -1 : **Vous avez en général une touche spécifique pour mettre au carré ou à l'inverse. Pour les autres puissances, utilisez la touche "x^y" ou "x^y"**

Ex : Vérifier avec votre machine : $2^3 = 8$ $2^{1+2} = 8$ $2^{-3} = 0,125$ $(2^3)^3 = 512$

Passer en mode "notation scientifique" : **Ce mode permet d'afficher les résultats de vos calculs en notation scientifique (Ne pas confondre notation scientifique et notation ingénieur). Avec cette notation, 123 devient $1,23 \times 10^2$ qui est en général noté sur votre machine $1,23E2$ ou $1,23^{02}$. Certaines calculatrices demandent de préciser le nombre de chiffres après la virgule : par exemple, "Sci 4" transformera 123 en $1,2300E2$. Le mot scientifique est souvent abrégé en "Sci". Bien sûr, il faut aussi savoir revenir en mode normal !**

Ex : Faire afficher le résultat par la calculatrice en notation scientifique, puis en écriture normale :

$$1,2345 = 1,2345E0 \quad 200 + 300 = 5,0E2 \quad \frac{5 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^{-2}}{15 \times 10^{-2}} = 1,0E-4$$

Transformer un nombre décimal en fraction : **(quand c'est possible !)**

Ex : Donner sous forme de fraction : $\frac{4+2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \sqrt{2} = ?$

Touches "Replay", "Entry", "Ins", "Del" :

Ex : Calculer $1 + 2 \times 3 + 4\sqrt{2}$, puis une fois que l'on a le résultat, réappeler l'expression " $1 + 2 \times 3 + 4\sqrt{2}$ " grâce à la touche "Replay" (Casio) ou "Entry" (Texas) et la transformer en " $(1 + 2 \times 3) + 4$ " à l'aide des touches "Ins" et "Del" (sans retaper l'expression)

Exercices : Calculer avec votre machine :

$$A = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = \quad B = 2 + \sqrt{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2 = \quad C = -\frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{5 + \frac{2}{3}}}{\frac{3}{4} + 1} =$$

$$D = 3^{-5} \times \sqrt{-2 + 4} \times 10^3 = \quad E = \frac{12 \times \frac{7}{3}}{5^{-3} 3^{-2}} = \quad F = -12^{\frac{2}{9}} + 2\sqrt{\frac{1+10}{10-1}}$$