Les nombres complexes

I) Forme algébrique d'un nombre complexe.

Théorème

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$**,**de nombres appelés *nombres complexes*, tel que :
$\mathbb{C}$contient $\mathbb{R}$;
$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$;
Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre non réel, noté i, vérifiant $i^2 = -1$;
Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme, dite algèbrique : $z = a + ib$
où a et b sont des réels.

Définitions

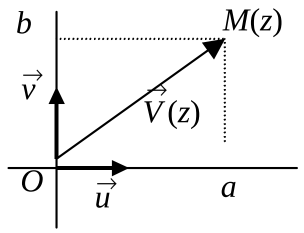
- Le réel a est appelé *partie réelle* de z et est noté Re(z).
- Le réel b est appelé *partie imaginaire* de z et est noté Im(z).
- Si $b = 0$ alors $z = a + 0i = a$ et z est un *réel.*
- Si $a = 0$ alors $z = 0 + ib = ib$ et z est appelé *imaginaire pur*.
- On ne peut pas comparer deux nombres complexes comme on compare deux réels.
  Par exemple pour 2 - 3i et 4 + 5i.

Premières conséquences (unicité de l'écriture algébrique)

Soit a, b, a', b' des réels

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$



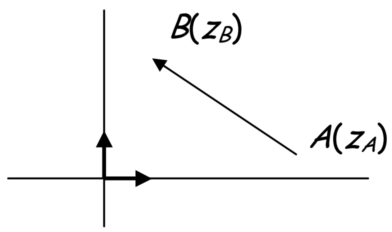
II) Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

Définitions

Soit le complexe $z = a + ib$, a et b réels.

- Le point $M(z)$ est appelé le *point image* de z.
- Le vecteur $\vec{V}(z)$ est le *vecteur image* de z.
- Le complexe z est *l'affixe* du point M et *l'affixe* du vecteur $\vec{V}$. On le note souvent z_M ou $z_{\vec{V}}$.



Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

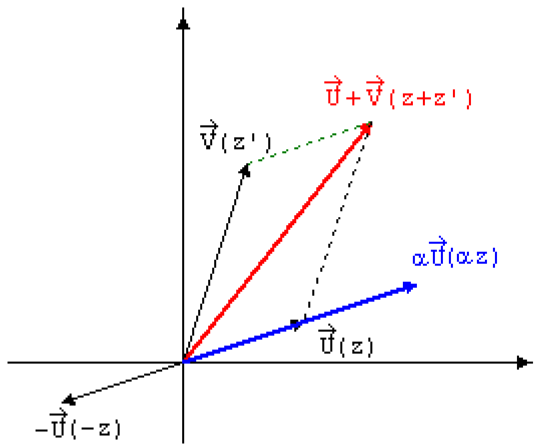
$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et tout réel α,

$$z_{\vec{U}+\vec{V}} = z_{\vec{U}} + z_{\vec{V}}$$

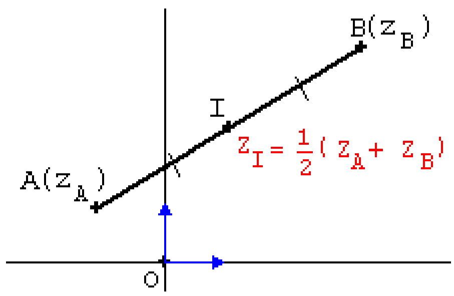
$$z_{\alpha\vec{U}} = \alpha z_{\vec{U}}$$



Affixe du milieu d'un segment

Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$



III) Les opérations dans $\mathbb{C}$

1) Somme et produit

Ces opérations suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.

$z + z' = \ldots = (a + a') + i(b + b')$

$z \times z' = \ldots = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

$-z = -a - ib$

et $z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$

Interprétations graphiques

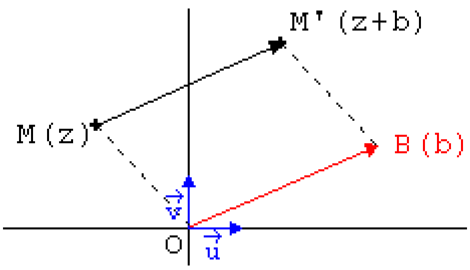
Si les complexes z et z' sont les affixes respectives des points M et M' et donc des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$

- $(z + z')$ est l'affixe de $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$
- Le complexe $-z$ est l'affixe du symétrique du point M par rapport à O.
- L'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$

Translation de vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$

Soit B le point d'affixe b

Le point M' d'affixe $z' = z + b$ est l'image du point M d'affixe z par la translation de vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$.



Dem : $z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M = b$ qui est l'affixe d'un vecteur constant.

donc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et la transformation est une translation.

2) Inverse

si (a ;b) $\neq$ (0 ;0), on a $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2}$. C'est la méthode utilisée pour écrire sous forme algébrique un inverse ou un quotient.

Mettre sous forme algébrique l'inverse du nombre $z = 3 - 4i$

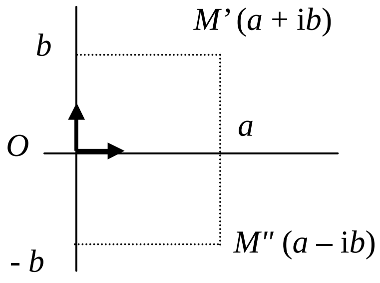
3) Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle *conjugué* du complexe z = a + i b, a et b réels, le complexe noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$.

Interprétation géométrique

Les images de deux complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (appelé souvent axe des réels).



Exemples :

Les conjugués respectifs de -3 , i, 1 - 5i sont -3, -i et 1 + 5i.

Théorèmes

Soit z un nombre complexe.

z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$

z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$

$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$.

Propriétés

Pour tous complexes z et z' :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\ \overline{z'}$ et, pour tout entier naturel n, $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$.
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$
- $z\overline{z} = a^2 + b^2$

IV) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1) Module et arguments d'un nombre complexe non nul.

Définition

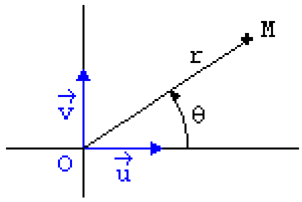
Soit z un nombre complexe non nul d'image M dans le plan muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), et soit (r,θ) un couple de coordonnées polaires du point M dans (O; $\vec{u}$).

- le réel r est appelé module de z et noté $|z|$;
- le réel θ est appelé argument de z et noté arg(z).

On a donc :

$|z| = r = OM$

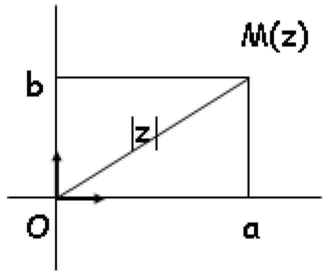
$\arg(z) = \theta = (\vec{u};\overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$



Remarque

Tout complexe non nul z a une infinité d'arguments. Si θ est l'un d'eux, tout autre argument de z est de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On écrit alors : arg(z) = θ [mod 2π] (ou simplement [2π]).



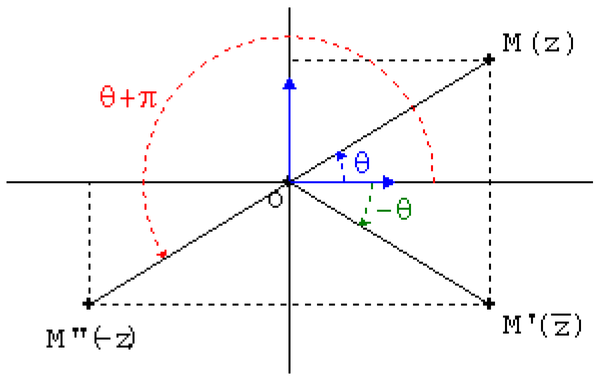
Conséquences

- Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Le module de tout réel x est la valeur absolue de x.

  Si $z = a$, $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a| = |z|$ et le module coïncide avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.
- z réel non nul équivaut à arg(z) = 0 [π].
- z imaginaire pur non nul équivaut à arg(z) = $\frac{\pi}{2}$ [π].
- Soit z un complexe non nul :

$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ $[2\pi]$

$\arg(-z) = \pi + \arg(z)$ $[2\pi]$



2) Propriétés des modules et arguments.

Propriétés des modules

Pour tous complexes z et z' :

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

$|-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}| = |z|$

$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

$|z+z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

$|zz'| = |z||z'|$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$$ si $z \neq 0$, et, pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$.

Propriétés des arguments

Pour tous complexes non nuls *z* et *z'*

arg(*zz'*) = arg(*z*) + arg(*z'*) [2π] et, pour tout entier naturel *n*, $\arg\left(z^n\right) = n \arg(z) \quad [2\pi]$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) \quad [2\pi]$

Démonstrations

- Posons $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et soit $z' = r'(\cos\beta + i\sin\beta)$

$zz' = rr'(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$

$= rr'(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta))$

$= rr'(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha + \beta))$

Comme $rr' > 0$, $\alpha + \beta = \arg(zz') \pmod{2\pi}$

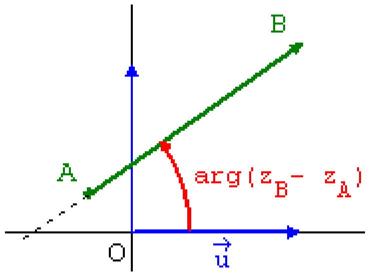
$= \arg(z) + \arg(z')$

- Exemple comme au bac : En ayant comme pré requis la propriété précédente, démontrer les deux suivantes.

3) Interprétations graphiques des modules et arguments

Longueur d'un segment [*AB*]

$AB = |z_B - z_A|$



Mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$

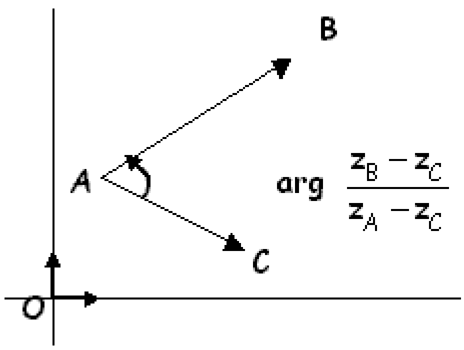
A et *B* étant deux points distincts

$$(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$$

Mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

A, *B* et *C* étant trois points distincts

$$\arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$$



Démonstration

Comme *A*, *B* et *C* sont trois points distincts, leurs affixes *a*, *b* et *c* le sont aussi.

$$\arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) = \arg(c - a) - \arg(b - a) = (\vec{u};\overrightarrow{AC}) - (\vec{u};\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB};\vec{u}) + (\vec{u};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$$

Conséquences

Les points *A*, *B* et *C* étant trois points distincts :

- les points *A*, *B* et *C* sont alignés si, et seulement si, $\arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) = 0\ [\pi]$
- les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si, et seulement si, $\arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) = \frac{\pi}{2}.[\pi]$

Exemple : Quelle est la nature du triangle donné par les trois points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives 1 + 3i, 3 + i et 4 + 2i ?

4) Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul.

Théorème

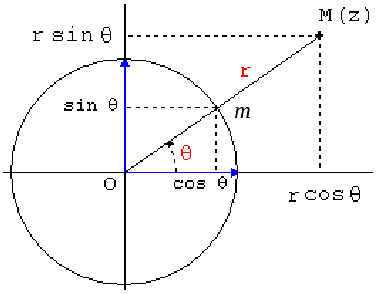
Soit z un nombre complexe non nul.

Alors z peut s'écrire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$

Cette écriture est appelée *forme trigonométrique* de z.

Réciproquement, Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$

Démonstration



Soit M un point d'affixe z, z non nul

Soit m le point situé sur la demi-droite $[OM)$ et le cercle trigonométrique

Alors m a pour affixe $\dfrac{z}{|z|}$ d'une part (vecteur colinéaire, de même sens et de norme … 1) et il existe un réel $\alpha = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}$ tel que m admet également $\cos\alpha + i\sin\alpha$ comme affixe puisqu'il se trouve sur le cercle trigonométrique.

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ d'où $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $\alpha = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}$.

Réciproquement, Si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $r > 0$

Alors $|z| = \ldots = r$

Puis, on a $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et on sait que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\boldsymbol{\theta} = \arg(z)\ [\mathbf{2\pi}]$

Donc, par unicité de l'écriture algébrique, $\cos\alpha = \cos\theta$ et $\sin\alpha = \sin\theta$

puis … $\alpha = \theta \pmod{2\pi}$

Relations de passage entre forme algébrique et formes trigonométriques.

Forme algébrique		Forme trigonométrique
$z = a + ib$, a et b réels	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$ $\longrightarrow$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

Exemples

Déterminer la forme trigonométrique des complexes -3, $2i$, $1 + i$.

V) La notation exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Définition

Pour tout réel θ on pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Alors, si z est un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ, on appelle *forme exponentielle* de z l' écriture : $r = re^{i\theta}$.

Règles de calcul sur les formes exponentielles

θ et θ' sont des réels quelconques, r et r' sont des réels > 0.

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r' \text{ et } \theta = \theta' \ [\text{mod } 2\pi])$$

$$re^{i\theta} \times re^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')} \text{ et } \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}, \text{ pour tout n de } \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

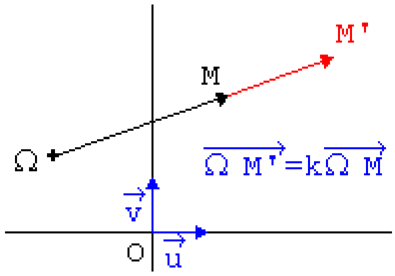
$$\frac{r'e^{i\theta'}}{r\,e^{i\theta}} = \frac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$$

Utilisations graphiques

Homothétie de centre Ω et de rapport k.

Soit Ω le point d'affixe ω et k un réel non nul.

Le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = k(z - \omega)$ est l'image du point M d'affixe z par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.



Démonstration

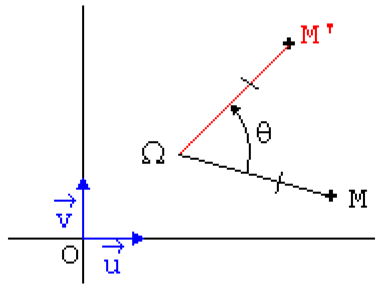
$$z' - \omega = k(z - \omega) \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = k.z_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{k.\overrightarrow{\Omega M}}$$

ce qui traduit vectoriellement $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ c'est-à-dire l'homothétie recherchée.

Rotation de centre Ω et d'angle θ

Soit Ω le point d'affixe ω et θ un réel.

Le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est l'image du point M d'affixe z par la rotation de centre Ω et d'angle θ.



Démonstration

- Si $M = \Omega$ alors $z = \omega$ et $z' = \omega$ donc Ω est invariant par la transformation
- Si $M \neq \Omega$ alors $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \Leftrightarrow \dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = |e^{i\theta}| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \arg(e^{i\theta}) = \theta \ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \ [2\pi]$$

Les deux points précédents traduisent la rotation recherchée.

VI) Equation du second degré à coefficients réels dans ℂ

Propriété

Toute équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z dans laquelle a réel non nul, b et c réels, admet dans ℂ deux solutions, éventuellement égales :

Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution réelle double $z = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$