

Epreuve de Mathématiques

Terminale S

Option Mathématiques

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 Commun à tous les élèves 5 points

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.

Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.

Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :

A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;

A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;

B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;

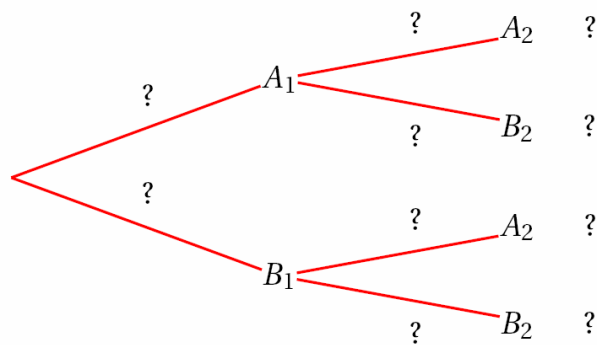
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1) a) Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

b) Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants :

$P_{A_1}(A_2)$, $P_{B_1}(A_2)$ et $P(A_1 \cap A_2)$.

c) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



d) Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $P(A_2) = \frac{8}{11}$.

2) Le prix du billet pour le film A est de 8 € et de 6 € pour le film B.

On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

Exercice 2 *A traiter par les élèves ayant choisi l'option mathématiques* **5 points**

- 1) a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
 b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
 c) En déduire que $6^{40} \equiv 1 [11]$ et que $6^{40} \equiv 1 [5]$.
 d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
- 2) Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
 a) Montrer que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
 b) Montrer que l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
 c) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
 d) Résoudre l'équation (E').
 En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1 [40]$.
- 3) Pour tout entier naturel a , démontrer que si $a^{17} \equiv b [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 [55]$, alors $b^{33} \equiv a [55]$.

Exercice 3 *Commun à tous les élèves* **5 points**

QCM : pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque erreur enlève 0,5 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

Vous répondrez sur votre copie en indiquant le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse.

- 1) L'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ admet dans \mathbb{R} :

| | | | |
|----------------|----------------|-----------------|-------------------------|
| A : 0 solution | B : 1 solution | C : 2 solutions | D : Plus de 2 solutions |
|----------------|----------------|-----------------|-------------------------|

- 2) L'expression $-e^{-x}$

| | | | |
|---------------------------|---------------------------|---|---|
| A : n'est jamais négative | B : est toujours négative | C : n'est négative que si x est positif | D : n'est négative que si x est négatif |
|---------------------------|---------------------------|---|---|

- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} =$

| | | | |
|--------------------|-------|-------|---------------|
| A : $-\frac{1}{2}$ | B : 1 | C : 2 | D : $+\infty$ |
|--------------------|-------|-------|---------------|

- 4) L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions :

| | | | |
|--|---|---|--|
| A : $x \rightarrow ke^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | B : $x \rightarrow ke^{\frac{x}{2}} + 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | C : $x \rightarrow ke^{\frac{x}{2}} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | D : $x \rightarrow ke^{2x} + \frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$ |
|--|---|---|--|

- 5) La courbe de la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{x}{2}$ admet en 0 une tangente d'équation:

| | | | |
|------------------------|-------------|-----------------------|-------------|
| A : $y = -\frac{x}{2}$ | B : $y = 0$ | C : $y = \frac{x}{2}$ | D : $y = x$ |
|------------------------|-------------|-----------------------|-------------|

Exercice 4 Commun à tous les élèves 5 points

Dans le plan complexe rapporté au repère (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 2 cm), on considère les points d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

Partie A

- 1) a) Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C .
b) Placer les points A , B et C .
- 2) Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.
- 3) Déterminer et construire l'ensemble \mathcal{D} des points M du plan tels que $|z| = |z - 2|$.

Partie B

A tout point M d'affixe z telle que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z - 2}$.

- 1) a) Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $z = \frac{-4}{z - 2}$.
b) En déduire les points associés aux points B et C .
c) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB .
- 2) a) **Question de cours :**

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\bar{z}$ où \bar{z} est le conjugué de z .

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

- b) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$.
- c) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de \mathcal{D} , où \mathcal{D} est l'ensemble défini à la question 3) de la partie A.
Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (Γ) .

Epreuve de Mathématiques

Terminale S

Options Physique et Biologie

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 Commun à tous les élèves 5 points

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.

Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.

Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :

A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;

A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;

B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;

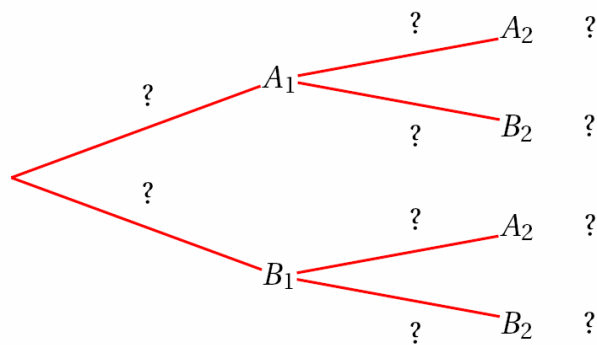
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1) a) Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

b) Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants :

$P_{A_1}(A_2)$, $P_{B_1}(A_2)$ et $P(A_1 \cap A_2)$.

c) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



d) Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $P(A_2) = \frac{8}{11}$.

2) Le prix du billet pour le film A est de 8 € et de 6 € pour le film B.

On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

Exercice 2 A traiter par les élèves n'ayant pas choisi l'option mathématiques 5 points

A l'instant $t = 0$, on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3mL d'un médicament.

Une étude du processus d'élimination de ce médicament a permis d'observer qu'à chaque instant t , exprimé en heures, la vitesse d'élimination de ce produit est proportionnelle à la quantité $f(t)$, exprimée en mL, de médicament encore présente dans le sang du patient, c'est-à-dire qu'il existe une constante strictement positive k telle que :

$$f'(t) = -kf(t).$$

Partie A

1) Un dosage effectué au bout de 30 minutes, c'est-à-dire à l'instant $\frac{1}{2}$, permet d'estimer la quantité de médicament présente dans le sang à 2,85 mL.

En déduire une approximation affine de $f'(0)$, puis de k .

2) On suppose désormais que $k = 0,1$.

a) Exprimer $f(t)$ en fonction de t .

b) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;12]$.

c) Tracer la courbe représentative (\mathcal{C}) de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unités 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

3) Déterminer graphiquement, à 10^{-1} près, la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 4 h, au bout de 5 h 30 min puis au bout de 12 h.

Partie B

f étant une fonction (non nulle) solution de l'équation $f' = -kf$, on pose $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite des valeurs prises par f de $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$. Ainsi $u_0 = f(0)$, $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right)$, ...

1) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

2) On suppose ici que $f(0) = 3$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2,85$.

Déterminer l'expression de $f(12)$.

Comparer à la valeur obtenue à la partie A. Commenter.

Exercice 3 Commun à tous les élèves 5 points

QCM : pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque erreur enlève 0,5 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

Vous répondrez sur votre copie en indiquant le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse.

1) L'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ admet dans \mathbb{R} :

| | | | |
|----------------|----------------|-----------------|-------------------------|
| A : 0 solution | B : 1 solution | C : 2 solutions | D : Plus de 2 solutions |
|----------------|----------------|-----------------|-------------------------|

2) L'expression $-e^{-x}$

| | | | |
|---------------------------|---------------------------|---|---|
| A : n'est jamais négative | B : est toujours négative | C : n'est négative que si x est positif | D : n'est négative que si x est négatif |
|---------------------------|---------------------------|---|---|

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} =$

| | | | |
|--------------------|-------|-------|---------------|
| A : $-\frac{1}{2}$ | B : 1 | C : 2 | D : $+\infty$ |
|--------------------|-------|-------|---------------|

4) L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions :

| | | | |
|--|---|---|--|
| A : $x \rightarrow ke^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | B : $x \rightarrow ke^{\frac{x}{2}} + 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | C : $x \rightarrow ke^{\frac{x}{2}} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | D : $x \rightarrow ke^{2x} + \frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$ |
|--|---|---|--|

5) La courbe de la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{x}{2}$ admet en 0 une tangente d'équation:

| | | | |
|------------------------|-------------|-----------------------|-------------|
| A : $y = -\frac{x}{2}$ | B : $y = 0$ | C : $y = \frac{x}{2}$ | D : $y = x$ |
|------------------------|-------------|-----------------------|-------------|

Exercice 4 Commun à tous les élèves 5 points

Dans le plan complexe rapporté au repère (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 2 cm), on considère les points d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

Partie A

- 1) a) Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C .
b) Placer les points A, B et C.
- 2) Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.
- 3) Déterminer et construire l'ensemble \mathcal{D} des points M du plan tels que $|z| = |z - 2|$.

Partie B

A tout point M d'affixe z telle que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z - 2}$.

- 1) a) Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $z = \frac{-4}{z - 2}$.
b) En déduire les points associés aux points B et C.
c) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB .
- 2) a) **Question de cours :**

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\bar{z}$ où \bar{z} est le conjugué de z .

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- pour tout nombre complexe z non nul, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

b) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$.

c) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de \mathcal{D} , où \mathcal{D} est l'ensemble défini à la question 3) de la partie A.

Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (Γ) .