Deux courbes qui se frôlent

Objectif : Il s'agit de déterminer, dans certains cas particuliers, les conditions pour qu'une parabole et un cercle soient tangents l'un à l'autre (c'est-à-dire qu'ils ont un point commun en lequel leurs tangentes respectives sont identiques).

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit *r* un nombre réel strictement positif. On considère la parabole *P* d'équation $y=x^2-3$ et le cercle *C* de centre *O* et de rayon *r*.

1. Un peu d'exploration.
   - (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique construire la parabole *P* et le cercle *C*.
   - (b) Conjecturer le nombre de points communs à la parabole *P* et au cercle *C* en fonction du nombre réel *r*.
   - (c) Donner une valeur approchée du (ou des) rayon(s) *r* tel(s) que la parabole *P* et le cercle *C* soient tangents (c'est-à-dire, se coupent en un point où leurs tangentes sont les mêmes) et donner dans ce cas une valeur approchée des coordonnées des points de tangence observés.

On suppose dans la suite de cette étude que $0<r<3$.

2. Un peu de calcul.
   - (a) Écrire un système (*S*) d'équations vérifié par les coordonnées *x* et *y* des points communs à la parabole *P* et au cercle *C* lorsqu'ils existent.
   - (b) En déduire qu'alors *x* est solution d'une équation (*E*) « bicarrée », c'est-à-dire de la forme $ax^4+bx^2+c=0$, et pour laquelle on explicitera les valeurs de *a*, *b* et *c*.

3. Un peu de justification.
   - (a) Discuter du nombre de points d'intersection du cercle et de la parabole lorsque $0<r<3$ et faire le lien avec le nombre de solutions de l'équation (*E*).
   - (b) Caractériser les cas de tangence et en déduire la valeur du rayon *r*, ainsi que les coordonnées des points communs à la parabole *P* et au cercle *C*, dans ce cas.

Investigations autour d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E): $y'=-2xy$.

Dans une première partie, la méthode d'Euler nous donnera une approximation sur **R** d'une fonction *f* solution qui vaut 1 en 0.

Dans une deuxième partie nous vérifierons qu'une fonction donnée est solution et nous comparerons à l'approximation trouvée en première partie.

1. On se donne un pas *h* strictement positif et deux suites (x_n) et (y_n) définissant une suite de points (M_n) de coordonnées (x_n, y_n) où :
   - $x_0=0$, $x_{n+1}=x_n+h$
   - $y'_n=-2x_n y_n$
   - $y_0=1$ et $y_{n+1}=y_n+h y'_n$.

   Les termes y_n sont des approximations de $f(x_n)$ par la méthode d'Euler.

   (a) À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, faire apparaitre les valeurs approchées à 10^{-2} près de x_n et de y_n pour un pas *h* valant 0,1.

n	x_n	y_n	y'_n
0	0	1	0
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

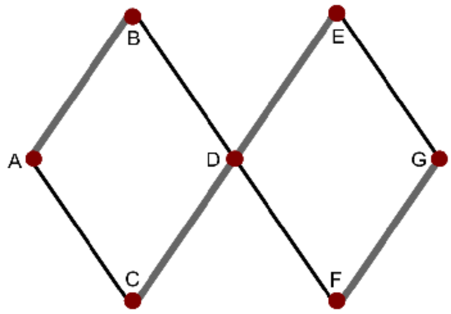
   (b) À l'aide du grapheur ou de la calculatrice, représenter la suite des points (M_n) .

2. (a) Vérifier que la fonction *g* définie sur *R* par : $g(x)=e^{-x^2}$ est une solution de l'équation différentielle $y'=-2xy$.

   (b) En posant pour tout réel *x*, $h(x)=\mathrm{e}^{x^2}g(x)$, montrer que *h* est une fonction constante et que *g* est la seule solution de l'équation telle que $g(1)=0$.

   Tracer à l'aide d'un grapheur ou de la calculatrice la courbe de *f* et comparer avec l'approximation obtenue dans la question 1).

Jouons avec le dessous-de-plat



Un dessous-de-plat est constitué de six barres métalliques rigides, de différentes longueurs, assemblées et articulées entre elles pour former deux losanges de côté 1 (voir la figure ci-contre).

Pour simplifier l'étude, on suppose que les barres sont de largeur nulle. Les barres sont alors représentées par les segments [*AB*], [*AC*], [*BF*], [*CE*], [*EG*] et [*FG*].

Le point A est supposé fixe. On déplace le point G le long d'une demi-droite d'extrémité A ; on constate que si le dessous de plat passe de la position de repli complet à l'extension complète, le point G décrit un segment de droite.

1. Préciser la longueur du segment décrit par le point G.
2. Construire une figure représentant ce dessous-de-plat en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.
3. Comment se déplacent les points B et C lorsque l'on déforme le dessous-de-plat (passage de la position de repli à l'extension complète) ?

   En utilisant le logiciel, faire apparaitre l'ensemble de points E décrit par le point E lors de la déformation du dessous-de-plat.
4. On définit désormais le repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$, où le vecteur $\vec{u}$ est unitaire et colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AD}$.

   On note t l'abscisse du point G (t étant un réel positif).

   (a) Dans quel intervalle évolue le réel t lorsque l'on passe de l'extension complète à la position de repli ?

   (b) Déterminer les coordonnées du point E en fonction de t.

   (c) En utilisant le logiciel, tracer la courbe représentative C de la fonction f définie sur l'intervalle [0;3] par : $f(x)=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$

   (d) Vérifier à l'aide du logiciel que le point E appartient à la courbe C.

   (e) Retrouver le résultat précédent par un calcul.

Les nombres repus

On appelle « nombre repu » tout entier naturel dont un multiple a une écriture décimale ne comportant que le chiffre 1. Par exemple, 13 est un nombre repu puisque 13c 8547=111 111.

On démontre (voir question 3) que si un nombre n est un nombre repu, il existe un nombre p tel que l'écriture décimale de np ne comporte que le chiffre 1, ce chiffre étant répété au plus n fois.

Pour tout k entier naturel, on désigne par l'entier dont l'écriture décimale comprend exactement k fois le chiffre 1: $u_k = 111\ldots 1 = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10 + 1 = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i$.

1. Dans un premier temps, on veut programmer sur un tableur ou sur une calculatrice un test pour reconnaître si un nombre n<100 est ou non un nombre repu. D'après ce qui précède, il suffit de tester si l'un des nombres 111, 1111, ... est divisible par n, en s'arrêtant lorsqu'on trouve un reste nul ou lorsqu'on a testé la divisibilité de par n.

   Pour le réaliser, on pratique un algorithme semblable à celui de la division euclidienne posée, mais au lieu à chaque étape de rajouter un 0 à droite du reste précédent, ***on rajoute un 1***. En reprenant l'exemple précédent, on obtient :

	111=8×13+7,	donc 1111=80×13+71
comme 71=5×13+6,	1111=85×13+6,	donc 11111=850×13+61
comme 61=4×13+9,	11111=854×13+9,	donc 111111=8540×13+91
comme 91=7×13+0,	111111=8547×13	et on s'arrête là puisque le reste est nul.

   Cet algorithme peut encore se symboliser par les quatre étapes de la division euclidienne posée:

```
111|13   | 1111|13   | 1111|13  |  11111|13    | 111111|13
  7|8    |   71|85   |   71|85  |    71 |854   |   71  |8547
   |     |    6|     |    6|    |    61 |      |   61  |
   |     |     |     |     |    |     9 |      |    91 |
   |     |     |     |     |    |       |      |     0 |
```

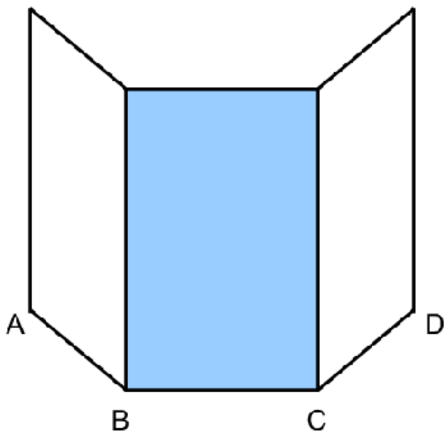
   Mettre en place ce test sur la calculatrice ou le tableur pour un nombre de un ou deux chiffres. En essayant plusieurs nombres, conjecturer les nombres de un ou deux chiffres qui ne sont pas des nombres repus et donner une propriété (P) permettant de les définir.

2. Démontrer que la propriété (P) définissant les nombres de un ou deux chiffres qui ne sont pas des nombres repus s'étend à tous les entiers, c'est-à-dire que « tous les entiers naturels vérifiant la propriété (P) sont non repus ».

   Énoncer la propriété réciproque de la propriété (P): cette propriété réciproque est vraie mais on ne demande pas de la démontrer.

3. Soit n un entier au moins égal à 2; pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on désigne par r_k le reste de la division euclidienne de u_k par n. Montrer que si aucun des r_k n'est égal à 0, il existe p et q tels que $1 \leqslant p < q \leqslant n$ et $r_p = r_q$ et qu'alors n n'est pas un nombre repu.

Le paravent chinois



Un paravent chinois se compose de 3 panneaux rectangulaires de mêmes dimensions. Les petits côtés, qui sont en contact avec le sol, mesurent 1 mètre.

Ce paravent découpe sur le sol un trapèze *ABCD*. On supposera que les angles *ABC* et *BCD* ont la même mesure et que les droites (*AD*) et (*BC*) sont parallèles. Ce polygone s'appelle le polygone de « sustentation ».

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur de l'angle *ABC* qui assure au polygone de « sustentation » une aire maximale.

1. Construire un trapèze *ABCD* tel que *AB*=*BC*=*CD* et (*AD*)//(*BC*). On s'assurera que la valeur de l'angle $a=\widehat{ABC}$ soit variable.
2. Conjecturer la valeur du réel *a* pour laquelle l'aire *s* du trapèze est maximum.
3. On note *H* le projeté orthogonal du point *B* sur la droite (*AD*) et on note *t* l'angle $\widehat{ABH}$, *t* étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

   Visualiser, à l'aide du logiciel, l'ensemble des points *M* de coordonnées (*t*,*s*).
4. Validation de la conjecture.
   (a) Démontrer que la fonction *f* définie par : $f(t)=[1+\sin(t)]\cos(t)$ représente l'aire du trapèze *ABCD* en fonction de *t*.
   (b) Vérifier à l'aide du logiciel que le point *M* est sur la courbe représentative de la fonction *f*.
   (c) Étudier les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$ et conclure.

La recette du kaprekar[1]

Soit un nombre N de trois chiffres dont deux au moins sont distincts. On note G le nombre formé avec ces mêmes chiffres pris dans l'ordre décroissant, et P le nombre formé avec ces mêmes chiffres pris dans l'ordre croissant.

On calcule la différence $D=G-P$. Le nombre D devient le nombre initial et on recommence le calcul.

Par exemple : N=878 donne G=887, P=788 et $D=887-788=99$, on remplace alors N par 099 et on recommence (avec cette fois un chiffre nul).

L'algorithme s'arrête lorsqu'on obtient deux fois de suite le même nombre D.

1. À l'aide d'un tableur et des fonctions `ENT()`, `MOD()`, `MAX()`, `MIN()` qu'il fournit:
   (a) Établir des formules permettant de calculer les chiffres des unités, dizaines, centaines d'un nombre de trois chiffres puis celles donnant G , P et $G-P$ afin de réaliser un tableau d'au moins 7 colonnes, comme celui de l'exemple ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G
1	N	Centaines	Dizaines	Unités	G	P	D
2	878	8	7	8	887	788	99
3	99	0	9	9	990	99	...

   (b) Appliquer l'algorithme aux nombres 787, 877 et 794 puis à différents nombres de trois chiffres.
   Qu'observe-t-on ?
   Émettre diverses conjectures sur la suite des nombres obtenus dans la colonne A.

2. Démontrer au moins deux des conjectures émises.

[1]Du nom du mathématicien indien Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905 – 1988). La version de l'algorithme qui est ici présentée est extraite de l'ouvrage suivant :
Jacques Lubczanski, *Comment réussir le triangle quelconque*, Éditions Cedic, Paris, 1986.

Approche probabiliste d'une intégrale

Soit g la fonction numérique définie pour tout x appartenant à [0;1] par $g(x)=x(1-x)e^{2x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. (a) À l'aide du logiciel ou de la calculatrice représenter la courbe $\mathcal{C}$.

   (b) Soit I, J et K les points de coordonnées respectives (1,0), (0,1) et (1,1). Observer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport au carré $OIKJ$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant g(x)$.

On admet que, lorsqu'on choisit un point au hasard à l'intérieur du carré $OIKJ$, la probabilité d'obtenir un point appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}$ est égale à l'aire de cet ensemble (c'est-à-dire de la partie du carré $OIKJ$ située sous la courbe $\mathcal{C}$).

On choisit au hasard un point à l'intérieur du carré $OIKJ$. On cherche quelle est la probabilité d'obtenir un point appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}$.

2. (a) À l'aide d'un tableur, simuler le tirage d'un échantillon de 200 points à l'intérieur du carré $OIKJ$ et déterminer la fréquence des points appartenant à $\mathcal{D}$ dans cet échantillon.

   (b) Réaliser 9 autres simulations de tirages d'échantillons de 200 points choisis au hasard dans le carré $OIKJ$ et compléter le tableau de valeurs suivant, où k est le rang de l'échantillon et la fréquence des points appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}$ dans l'échantillon de rang k.

rang k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquence										

   Donner des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près.

   (c) À l'aide d'autres simulations, émettre une conjecture sur la probabilité que le point choisi appartienne à l'ensemble $\mathcal{D}$.

3. Dans cette question on envisage quelques formes de vérifications de la conjecture précédente.

   (a) Exprimer la probabilité que le point choisi aléatoirement dans le carré $OIKJ$ appartienne à l'ensemble $\mathcal{D}$ sous forme d'une intégrale.

   (b) Vérifier alors le résultat à l'aide de deux intégrations par parties successives ou bien d'une calculatrice.