Etude d'un extremum : Variation de longueur

Enoncé du problème : (o,A,B) est un repère orthonormal du plan. Le point M est un point quelconque du quart de cercle de centre o de rayon 1. La tangente en M au quart de cercle coupe l'axe des abscisses au point I et l'axe des ordonnées au point J.
L'objectif du problème est d'étudier les variations de la longueur du segment [IJ] quand le point M décrit l'arc $\widehat{AB}$.

1- Réalisation de la figure sous Géoplanw : observations, conjectures.

Cliquer sur *Fichier, Nouvelle figure.*
Cliquer sur l'icône *repère.*
Cliquer sur *Créer, point, point repéré, dans le plan.* Abscisse:1, ordonnée :0, nom du point :A.
Créer de même le point B de coordonnées (0,1).
Créer, ligne, arc de cercle, arc défini par extrémités et cercle. Nom du cercle : c, origine : A, extrémité : B, nom de l'arc : AB.
Créer, point, point libre, sur un arc. Nom de l'arc : AB, nom du point : M.
Créer, ligne, segment : oM,
Créer, ligne, droite, perpendiculaire. Droite passant par :M, et perpendiculaire à oM, nom de la droite :d.
Ne pas dessiner cette droite.
Créer, point, intersection de deux droites. Première droite :d, deuxième droite : ox, point d'intersection :I.
Créer de même le point J, intersection des droites d et oy.
Créer le segment [IJ].
Créer, numérique, calcul géométrique, angle de vecteurs, vec(o,A) , vec(o,M) , nom : x (penser à mettre en radians si ce n'est pas le cas).
On va afficher cet angle et la mesure de IJ ; pour cela :
Créer, affichage, variable numérique déjà définie. Nom de la variable à afficher : x, nombre de décimales : 2.
Créer, affichage, longueur d'un segment, nom du segment : IJ

Avec le bouton gauche de la souris, se positionner sur M pour le rendre mobile.

Observations : a) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

b) Compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,5	1,55	1 ,57
IJ												

c) Quelles sont les valeurs de IJ quand x prend des valeurs très proches de 0 ? de 1 ?

d) Quelles semblent être les variations de IJ lorsque M décrit l'arc $\widehat{AB}$?

e) Observe-t-on une certaine symétrie ?

f) Quelle semble être la valeur minimale atteinte par la longueur IJ ? Pour quelle valeur de x ? Où est alors le point M ? (on pourra affiner le tableau de valeurs… affichages à 6 décimales…).

On peut faire dessiner l'ensemble des points de coordonnées (x, IJ) Pour cela :
Créer, point, point repéré, dans le plan. Abscisse :x , ordonnée : IJ , nom du point : L.
Afficher, sélection trace, sélectionner le point L en cliquant sur le bouton gauche, OK, cliquer ensuite sur l'icône T, faire bouger le point M de A vers B pas trop rapidement..
Pour avoir une bonne visualisation, déplacer le repère en bas à gauche (touche droite de la souris).

II Justifications :

Soit x l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

a) Montrer que les triangles OMI et JOI sont semblables.
En déduire que IJ = OI× OJ et que IJ = $\dfrac{1}{\cos x \times \sin x}$.

b) Soit g la fonction définie sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ par g (x) = $\dfrac{1}{\cos x \times \sin x}$.
Etudier la dérivabilité de g et calculer g'(x).

c) Etudier les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.

d) Etudier les variations de la fonction g. Dresser son tableau de variations.

e) En déduire la valeur de x pour laquelle g admet un minimum, quel alors ce minimum ?

f) Observer la représentation graphique de g sur l'écran d'une calculatrice ou en utilisant le traceur Sine qua non.
Démontrer que la courbe représentative de g admet un axe de symétrie que l'on déterminera.

g) Justifier certaines observations de la première partie à l'aide des questions précédentes.

DM 3 : Ce TP doit être rendu rédigé pour la semaine prochaine