Utilisation de l'algèbre linéaire

Exemple

On montre que l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y,z) associe le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (x',y',z') tel que

$$\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = 2x + 2y + 5z \\ z' = -x + y + z \end{cases}$$

est une application linéaire.

On a donc $\vec{v} = f(\vec{u})$.

En associant les matrices (colonnes pour les vecteurs et carrée pour l'application linéaire f) respectivement égales à $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, la relation $\vec{v} = f(\vec{u})$ se traduit matriciellement en $Y = AX$ qui s'écrit sous Scilab en $Y = A*X$.

La connaissance de $\vec{u}$ ou de X permet ainsi de connaître $\vec{v}$ ou Y.

Réciproquement, si f est bijective, la connaissance de $\vec{v}$ ou de Y permet de déterminer $\vec{u}$ ou de X :

Dans ce cas, $\vec{v} = f(\vec{u})$ devient successivement $f^{-1}(\vec{v}) = f^{-1} \circ f(\vec{u})$ puis $f^{-1}(\vec{v}) = \vec{u}$

Ainsi $X = A^{-1}Y$ qui s'écrit sous Scilab en $X = A\backslash Y$.

Cette méthode s'applique à toute application linéaire donnée analytiquement. Un système, une application linéaire, des suites définies de façon récurrentes, des équations différentielles permettent une résolution analogue.

Exercice

Modélisation d'un échange entre deux milieux

Deux récipients A et B sont séparés par une membrane perméable dans les deux sens. On place dans les récipients A et B deux solutions contenant respectivement a_0 molécules (dans A) et b_0 molécules (dans B). On suppose que, toutes les heures, 20% des molécules passent de A dans B et 10% des molécules passent de B dans A. On note a_n et b_n les nombres respectifs de molécules présentes dans A et B au bout de n heures.

1) Montrer que $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}1b_n \\ b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}9b_n \end{cases}$ et donner l'interprétation matricielle de ce système en considérant la matrice colonne $p_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Les deux récipients n'ayant d'échanges qu'entre eux.

2) Sachant que si $a_0 = 150$ et $b_0 = 20$ (unités), quelles instructions écrire pour connaître les quantités de molécules après 10 heures ?

Quelle méthode appliqueriez vous pour connaître la répartition limite, si elle existe, entre les deux milieux ?

3) Quels sont les dosages initiaux nécessaires pour obtenir après 1 heure, une répartition égale à $a_1 = 130$ et $b_1 = 40$ (unités).

Ecrire l'instruction Scilab permettant d'expliciter le résultat.

Exercices

Dans un premier temps, traiter les exercices 2, 3, 5, 6 de la fiche *Quelques applications du calcul matriciel*, dans cet ordre.