Principe de la méthode du pivot de Gauss

La méthode de Gauss est une méthode permettant de résoudre les systèmes linéaires mis sous forme matricielle $A.x = b$ où A est une matrice carrée $n \times n$, x un vecteur de dimension n représentant les inconnues et b le vecteur de dimension n représentant le second membre.

$$\begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + A_{1,3}x_3 = b_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + A_{2,3}x_3 = b_2 \\ A_{3,1}x_1 + A_{3,2}x_2 + A_{3,3}x_3 = b_3 \end{cases}$$

La méthode consiste à transformer le système $A.x = b$ en un autre système équivalent $T.x = c$ avec T matrice triangulaire supérieure. On obtient donc un nouveau système :

$$\begin{cases} T_{1,1}x_1 + T_{1,2}x_2 + T_{1,3}x_3 = c_1 \\ \qquad\qquad T_{2,2}x_2 + T_{2,3}x_3 = c_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad T_{3,3}x_3 = c_3 \end{cases}$$

qui se résout très facilement en récupérant les x_i de proche en proche en commençant pas x_n.

Pour permettre de triangulariser (ou trianguler) la matrice initiale, on a besoin d'effectuer des manipulations (dites élémentaires) sur A :

échanger deux lignes de A (recherche et placement du pivot)
multiplication d'une ligne de A par un scalaire non nul (afin de préparer la manipulation suivante)
addition à une ligne de A une autre ligne de A

Lorsqu'à chaque étape de ces manipulations, il existe toujours un pivot non nul, la matrice (et donc le système) pourra se triangulariser. Si les mêmes manipulations sont effectuées sur le vecteur b (matrice colonne), nous pourrons alors obtenir le système équivalent noté sous forme matricielle $T.x = c$.

Remarque :
Attention, les dépassements de capacité sur les réels ne sont pas testés ; on risque des erreurs d'exécution comme le montre l'exemple suivant :

```
-->A=[1 2 3 4;9 8 7 6;5 -5 -8 3;-4 -1 -2 -3]
 A  =
!   1.    2.    3.    4. !
!   9.    8.    7.    6. !
!   5.  - 5.  - 8.    3. !
! - 4.  - 1.  - 2.  - 3. !
-->b=[1 2 3 0]'
 b  =
!   1. !
!   2. !
!   3. !
!   0. !
-->c=resoudre(A,b)
 c  =
! -  .175     .7446429  -  .7642857     .4946429 !
-->A*c'   //transformation de la solution en un vecteur colonne
 ans  =
!   1.        !
!   2.        !
!   3.        !
!   1.110E-15 !    //et 1,11.10^-15 ≠ 0
```

```
function [A,b]=entre_systeme
A=input('Entrez la matrice caractérisant le système d''inconnues')
b=input('Entrez la matrice du second membre')

function [n]=ligne_pivot(A,i)
while A(i,i)==0 do i=i+1; end
n=i;

function [B]=echanger_lignes(A,i,j)
for k=1:sqrt(length(A)) do aux=A(i,k);A(i,k)=A(j,k);A(j,k)=aux; end
B=A

function [B]=multiplier_ligne(A,i,x)
for k=1:sqrt(length(A)) do A(i,k)=A(i,k)*x; end
B=A

function [B]=ajouter_lignes(A,i,j)
for k=1:sqrt(length(A)) do A(j,k)=A(j,k)+A(i,k); end
B=A

function [B]=trianguler(A)
for i=1:(sqrt(length(A))-1) do n=ligne_pivot(A,i);
	if n<>i then A=echanger_lignes(A,i,n); end
	for j=(i+1):(sqrt(length(A))) do
		if A(j,i)<>0 then
			A=multiplier_ligne(A,j,-A(i,i)/A(j,i));
			A=ajouter_lignes(A,i,j)
		end
	end
end
B=A

function [x]=resoudre(A,b)
for i=1:(sqrt(length(A))-1) do
	n=ligne_pivot(A,i);
	if n<>i then A=echanger_lignes(A,i,n);
		aux=b(i);b(i)=b(n);b(n)=aux;
	end
	for j=(i+1):(sqrt(length(A))) do
		if A(j,j)<>0 then
		b(j)=b(j)*(-A(i,i)/A(j,i))
		A=multiplier_ligne(A,j,-A(i,i)/A(j,i));
		A=ajouter_lignes(A,i,j)
		b(j)=b(j)+b(i)
		end
	end
end

n=sqrt(length(A)); x=zeros(1,n);
for i=n:-1:1 do
	x(i)=b(i)
	for j=n:-1:(i+1) do x(i)=x(i)-A(i,j)*x(j); end
	x(i)=x(i)/A(i,i)
end
```