Autour des fractions

<u>Partie A</u> Calculs sur les fractions

Vous allez dans un premier temps créer un ensemble de procédure et fonctions permettant de représenter les fractions et de travailler avec.

Les fractions seront représentées sous la forme d'un tableau de deux éléments, le premier contiendra le numérateur et le second le dénominateur. Exemple, le tableau [2,3] représente la fraction $\frac{2}{3}$.

1) Ecrire la fonction **[t]=lire** permettant la donnée d'une fraction (représentée par le tableau *t*) par un utilisateur au clavier. Vous devrez vous assurez que le dénominateur est non nul.

2) Ecrire la fonction **ecrire(f)** permettant de visualiser la fraction sous la forme p/q ou simplement p si q = 1. Pour l'affichage, vous pourrez utiliser l'instruction disp(string(f(1))+' / '+string(f(2))) dans le premier cas et adapter les autres affichages à partir de cette proposition.

Si q < 0, vous préférerez l'affichage de la forme -p/(-q) comme sur l'exemple suivant

Si f(1) = 8 et f(2) = -3, l'affichage sera -8/3

3) Ecrire la fonction **[c]=pgcd(a,b)** permettant de déterminer le pgcd (plus grand commun diviseur) des deux nombres a et b.

Vous pourrez utiliser par la méthode suivante ; si ce n'est pas le cas, vous expliquerez votre démarche par un texte clair.

Si un des deux nombres est nul, l'autre est le pgcd sinon il faut remplacer le plus grand par la différence entre le plus grand et le plus petit et laisser le plus petit inchangé.

Puis recommencer ainsi avec la nouvelle paire jusqu'à ce qu'un des deux nombres soit nul. Dans ce cas, l'autre nombre est le pgcd.

4) Ecrire la fonction **[t]=reduire(f)** permettant de simplifier la fraction f grâce à la fonction précédente.

5) Ecrire la fonction **[f3]=addition(f1,f2)** permettant d'obtenir la fraction f3 comme somme des fractions f1 et f2 (avec cette somme simplifiée).

6) Ecrire la procédure **[f3]=soustraction(f1,f2)** permettant d'effectuer, de la même manière la soustraction de f1 par f2.

7) Ecrire la procédure **[f3]=multiplication(f1,f2)** afin d'obtenir la fraction simplifiée f3 comme produit de f1 par f2.

8) Terminer la construction des outils de calculs sur les fractions par la procédure **[f3]=division(f1,f2)** permettant d'obtenir la division de f1 par f2.

<u>Partie B</u> : Fractions continues

Connaissant la fraction $\frac{a}{b}$, la division permet d'obtenir l'écriture décimale. Réciproquement, peut-on retrouver l'écriture fractionnaire ou la meilleure approximation fractionnaire d'un nombre exprimé en écriture décimale ?

Examinons le cas d'un réel positif.

Si ce réel contient "peu" de chiffres après la virgule, une méthode consiste à exprimer ce réel comme la division d'un entier par une puissance de dix (définition d'un nombre décimal) puis de simplifier cette fraction.

Dans le cas où ce réel est obtenu suite à un calcul et s'il contient "beaucoup" de chiffres après la virgule, une autre méthode consiste à déterminer la fraction continue associée à ce nombre puis de simplifier cette fraction continue.

Exemple : $\pi = 3{,}14159265359\ldots = \mathbf{3} + 0{,}14159265359\ldots = \mathbf{3} + \dfrac{1}{7{,}062513306\ldots} = \mathbf{3} + \dfrac{1}{\mathbf{7} + 0{,}062513306\ldots}$

$$= \mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{7} + \cfrac{1}{15{,}9965944068\ldots}} = \mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{7} + \cfrac{1}{15{,}9965944068\ldots}} = \mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{7} + \cfrac{1}{\mathbf{15} + 0{,}9965944068\ldots}}$$

Les suite des nombres entiers [3 ; 7 , 15 , …] est la fraction continue associée au réel initial, dont des approximations de plus en plus fines sont les fractions successives :

$$\mathbf{3} \text{ puis } 3 + \frac{1}{7} = \mathbf{\frac{22}{7}} \text{ puis } 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \mathbf{\frac{333}{106}} \text{ puis } \ldots$$

Nous nous contenterons, dans un premier temps, de la détermination des cinq premiers éléments des fractions continues qui seront donc représentées par un tableau de taille 5.

1) Ecrire la fonction **[f]=frac_cont(x)** permettant d'obtenir la fraction continue f du réel x.

2) Ecrire la fonction **reconstitution(f)** permettant la détermination puis l'affichage de la fraction simplifiée de l'approximation obtenue par la fraction continue représentée par le tableau f.

Exemple, si vous aviez la fraction continue [3 ; 7 , 15 , …] (mais elle est ici de taille 3), vous devrez déterminer puis afficher 333/106.

<u>Partie C</u> : Promenades aléatoires

Si on considère la suite des puissances de $\frac{3}{2}$ et si on ne regarde que les chiffres après la virgule, on tombe sur un problème que les mathématiciens ne savent pas encore résoudre : cette suite de nombres est-elle aléatoire ?

Afin d'illustrer cette question, vous devrez utiliser une méthode graphique :

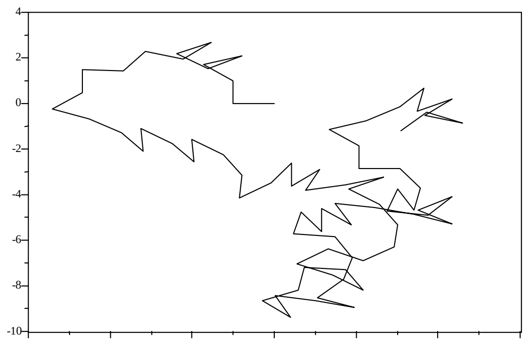
Comment construire une promenade associée à une suite modulo 1 ?

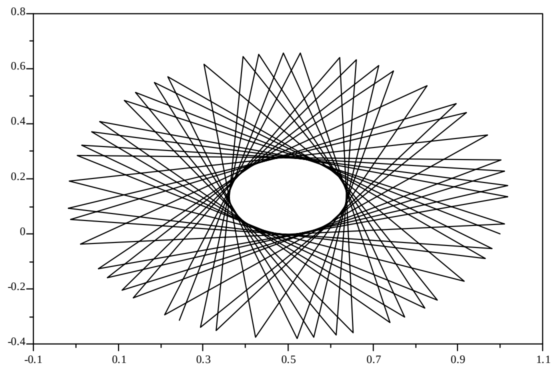
- Le point de départ est le centre d'un cercle de rayon 1.
- A la première étape, on place le premier terme de la suite, suivant sa valeur, sur le cercle et l'on joint les deux points. L'angle permettant de repérer ce point étant proportionnel à sa valeur, modulo 1.

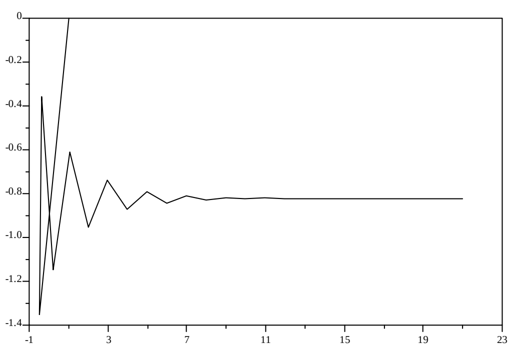
Exemple : si la première valeur est 3,258 968 … soit 0,258 968 … modulo 1, l'angle permettant de repérer ce point sur le cercle est 0,258 968 … $\times 2\pi$ rad

- Le dernier point dessiné devient le centre du nouveau cercle qui va servir à la deuxième étape et ainsi de suite…

Les schémas suivants présentent respectivement une promenade aléatoire des puissances de $\frac{3}{2}$, une autre sur les multiples de $\sqrt{2}$ et enfin des puissances de $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le "nombre d'or".







```
function [t]=lire
b=%t
t=zeros(1,2);
t(1)=input('Entrez le numérateur')
while b==%t do
t(2)=input('Entrez le dénominateur')
if t(2)<>0 then b=%f;
end
end

function ecrire(f)
if f(2)==1 then disp(f(1))
elseif f(2)==-1 then disp(-f(1))
elseif f(2)<0 then disp(string(-f(1))+' / '+string(-f(2)))
else disp(string(f(1))+' / '+string(f(2)))
end

function [c]=pgcd(a,b)
if a<b then mi=a;ma=b; else mi=b;ma=a; end
while mi<>0 do
a=ma-mi;
b=mi;
if a<b then mi=a;ma=b; else mi=b;ma=a; end
end
c=ma

function [t]=reduire(f)
n=pgcd(f(1),f(2))
t=f
t(1)=t(1)/n;
t(2)=t(2)/n

function [f3]=somme(f1,f2)
f3=zeros(1,2)
f3(1)=f1(1)*f2(2)+f2(1)*f1(2);
f3(2)=f1(2)*f2(2)
f3=reduire(f3)

function [f3]=soustraction(f1,f2)
f3=zeros(1,2)
f3(1)=f1(1)*f2(2)-f2(1)*f1(2);
f3(2)=f1(2)*f2(2)
f3=reduire(f3)

function [f3]=multiplication(f1,f2)
f3=zeros(1,2)
f3(1)=f1(1)*f2(1);
f3(2)=f1(2)*f2(2)
f3=reduire(f3)


function [f3]=division(f1,f2)
f3=zeros(1,2)
f3(1)=f1(1)*f2(2);
f3(2)=f1(2)*f2(1)
```

```
f3=reduire(f3)

function [f]=frac_cont(x)
f=zeros(1,5)
for i=1:5 do
f(i)=floor(x);
x=1/(x-f(i))
end

function reconstitution(f)
t=zeros(1,2)
t(1)=f(5);t(2)=1;
for i=4:-1:1 do
t=somme([f(i) 1],division([1 1],t))
end
ecrire(t)

function [x,y,b]=coordonnees(a,n)
b=((1+sqrt(5))/2)^n;
b=b-floor(b);
b=b*2*%pi;
x=cos(b);y=sin(b);

function programme
xbasc;
disp('Combien de marches aléatoires souhaitez-vous représenter ?')
n=input('donnez votre valeur');
x=1:(n+1);sx=0;
y=1:(n+1);sy=0;
a=1;
for k=0:n do
[u,v,w]=coordonnees(a,k);
sx=sx+u;x(k+1)=sx;
sy=sy+v;y(k+1)=sy;
a=w;
end
plot(x,y)
```