

Montrer une égalité ou une inégalité : $A = B$ ou $A < B$ ou $A > B$ (1)

1) La méthode directe

$A = \dots = B$

ex : Démontrer que $\left(\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1$

2) La méthode directe inverse

$B = \dots = A$.

ex : Montrer que $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3) = (x + 1)^2 - 4$

3) Égalité avec une troisième expression

$\begin{cases} A = \dots = C \\ B = \dots = C \end{cases} \Rightarrow A = B$

ex : Montrer que $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

4) La méthode de la différence

Il faut dans ce cas étudier le signe de $A - B$

ex : Comparer $A(x) = (x + 2)^2$ et $B(x) = (2x - 5)^2$

ex : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$, comparer les nombres $A = \frac{n+2}{n}$ et $B = \frac{n}{n-2}$

ex : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$

5) La méthode du quotient

Si A et B sont strictement positifs, on compare $\frac{A}{B}$ et 1.

ex : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comparer $f(n) = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2n}$ et $g(n) = \frac{n + 1}{n + 2}$

6) La méthode des questions équivalentes

$A = B$?

$\dots = \dots$?

$C = C$ ce qui est vrai donc l'hypothèse de départ $A = B$ est vraie.

ex : Montrer que si a et b sont deux réels positifs, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

ex : Montrer que si a et b sont deux réels positifs, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$

7) La méthode des certitudes

$n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq 2 \Rightarrow 2n + 1 \geq 3 \Rightarrow \dots$

ex : Montrer que si $x > 3$ alors $x^2 - \frac{5}{x} > 7$

ex : Après avoir remarqué que $0 < n - 2 < n$, si $n \geq 3$, comparer $A = 1 + \frac{2}{n}$ et $B = 1 + \frac{2}{n-2}$, si $n \geq 3$.

ex : Soit x un nombre réel de l'intervalle $[3; 5]$.

On donne $f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$. Démontrer que $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{5}{6}$