

Equation différentielle et méthode d'Euler

énoncé

Soit l'équation différentielle : $y' = -2y$. On admet que la fonction f solution de cette équation, définie sur \mathbb{R} et vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction f telle que $f(x) = \exp(-2x)$.

On cherche à comparer $f(1)$ aux valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode d'Euler avec différents pas. On se place sur l'intervalle $[0, 1]$ en prenant un pas h égal à $\frac{1}{n}$, où n est un entier supérieur à 2.

On obtient ainsi, dans le plan muni d'un repère, une suite de points notés M_k , d'abscisse x_k et d'ordonnée y_k telles que :

$$x_0 = 0, y_0 = 1, \text{ et pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1, x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n} \text{ et } y_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)y_k.$$

Pour tout entier k compris entre 0 et n , y_k est une valeur approchée de $f(x_k)$.

1. Déterminer l'expression de y_k en fonction de k (n étant une valeur donnée).

Appeler l'examineur pour faire vérifier l'expression obtenue pour y_k .

2. A l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

Valeur de n égale à	k	x_k	y_k
10	0	0	1
Pas égal à 0,1	1	0,1	0,8
	2	0,2	
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		

3. En déduire une valeur approchée de $f(1)$.

Appeler l'examineur et lui présenter le tableau de valeurs construit avec $n = 10$.

Lui expliquer comment modifier le tableau lorsque $n = 20$ ou $n = 30$.

4. Répéter la méthode dans les cas $n = 20$ puis $n = 30$ et donner les valeurs approchées de $f(1)$ ainsi obtenues. Sur la copie, recopier et compléter le tableau suivant :

Valeur de n égale à	10	20	30	Valeur approchée de e^{-2}
Valeur approchée de y_n				

5. A l'aide du tableur, représenter graphiquement dans un repère du plan la suite des points M_k obtenue à la question 4., dans le cas où n est égal à 30, ainsi que la fonction solution.

Appeler l'examineur et lui présenter la représentation graphique réalisée.

Production demandée

- Calcul de y_k en fonction de k .
- Réalisation et visualisation à l'écran de tableaux de valeurs obtenus à l'aide d'un tableur.
- Détermination de valeurs approchées de $f(1)$ (tableau rempli).
- Visualisation à l'écran et si possible impression de la représentation graphique.