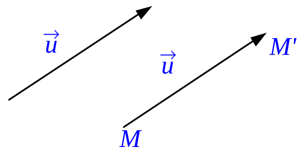
Les transformations du plan

I) Les transformations vues au collège

1) La translation

Définition et notation

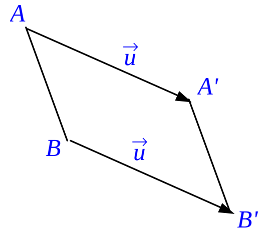


Le point M a pour image le point M' par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

On note $M' = t_{\vec{u}}(M)$ (dans ce cas, M est l'antécédent de M' par $t_{\vec{u}}$)

• Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}}$ n'a pas de point invariant (où un point invariant, appelé aussi point fixe, est confondu avec son image)

• Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors tout point est invariant, $t_{\vec{0}}$ est l'application identique du plan.



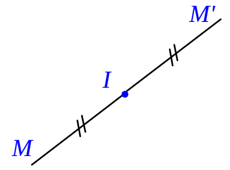
Propriétés de la translation

Si $A' = t_{\vec{u}}(A)$ et $B' = t_{\vec{u}}(B)$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

$ABB'A'$ est un parallélogramme.

2) La symétrie centrale

Définition et notation



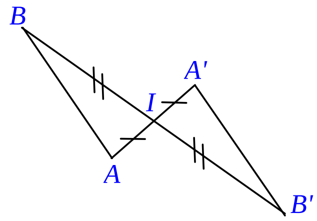
Le point M a pour image le point M' par la symétrie de centre I signifie que I est le milieu de $[MM']$.

On note $M' = s_I(M)$

• I est l'unique point invariant de s_I.

• Si $M' = s_I(M)$ alors $M = s_I(M')$

Propriétés de la symétrie centrale



Si $A' = s_I(A)$ et $B' = s_I(B)$ alors $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$

$ABA'B'$ est un parallélogramme de centre I.

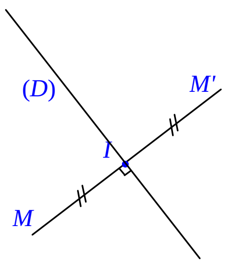
3) La réflexion

Définition et notation

Le point M a pour image le point M' par la réflexion d'axe (D) (ou symétrie d'axe (D)) signifie que

$M = M'$ si $M \in (D)$

(D) est la médiatrice du segment $[MM']$ si $M \notin (D)$



On note $M' = s_{(D)}(M)$.

• Un point M est invariant par $s_{(D)}$ si et seulement si $M \in (D)$

• Si $M' = s_{(D)}(M)$ alors $M = s_{(D)}(M')$

4) La rotation

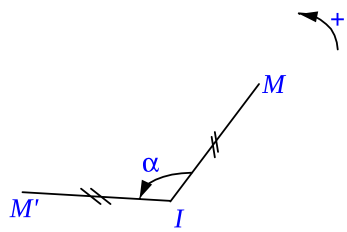
Définition et notation

Un point M a pour image le point M' par la rotation de centre I et d'angle α signifie que :

$M = M'$ si $M = I$

$IM = IM'$ et $\widehat{MIM'} = \alpha$ (en respectant l'orientation des angles) si $M \neq I$

On note $M' = R(I,\alpha)$ ou plus simplement $M' = R(M)$



• Si $\alpha = 0$ alors tout point est invariant, $R(I,0)$ est l'application identique du plan.

• Si $\alpha \neq 0$ alors le centre I est l'unique point invariant de $R(I,\alpha)$

• Si $\alpha = 180°$ alors $R(I,180)$ est la symétrie de centre I

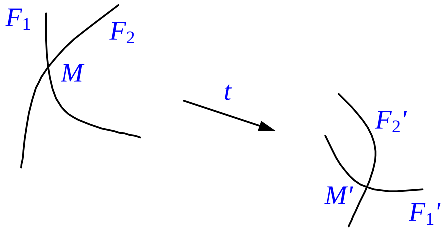
• Si $\alpha = 90°$ ou $-90°$ alors $R(I,\alpha)$ correspond à un quart de tour.

II) Propriétés de ces transformations

1) Isométrie

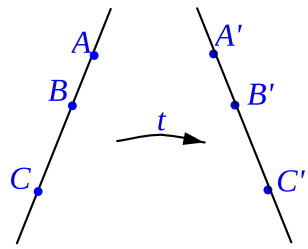
Une isométrie est une transformation qui conserve les distances (et donc les aires et les volumes)
Les translations, les réflexions, les rotations et les symétries centrales sont des isométries

2) Image d'un point d'intersection de deux figures



Soit une transformation t et deux figures F_1 et F_2 se coupant en M. Alors M', l'image de M par t, est l'intersection des figures $F_1' = t(F_1)$ et $F_2' = t(F_2)$
C'est-à-dire, si $\{M\} = F_1 \cap F_2$ alors $\{M\} = F_1' \cap F_2'$

3) Image de points alignés



Soit A, B et C trois points et k un réel tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (A,B et C sont donc alignés) et A', B' et C' leurs images respectives par une translation, une réflexion, une rotation ou une symétrie centrale,

Alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$

<u>Conséquences</u> : l'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$
l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$
l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$

<u>Remarque</u> : Dans le cas particulier d'une translation ou d'une symétrie centrale, l'image d'une droite (D) est une droite (D') parallèle à (D).

4) Images de figures usuelles

Par une translation, une réflexion, une rotation ou une symétrie centrale, l'image d'une figure (F) (triangle, cercle, parallélogramme, rectangle, etc …) est une figure (F') de même nature, de mêmes dimensions et de même aire.
Ces transformations conservent le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques et le contact entre les figure (tangentes).
Une translation, une symétrie centrale ou une rotation conservent les angles orientés tandis qu'une réflexion le transforme en son opposé.