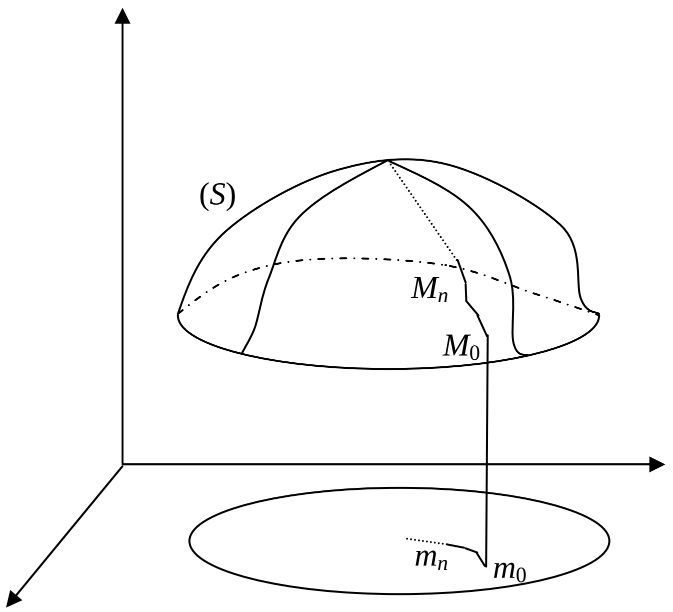
Il s'agit ici de donner une méthode numérique de recherche du maximum d'une fonction de deux variables.
Pour déterminer le maximum d'une fonction f, il suffit de prendre un point $m_0 \in D_f$ auquel correspond le point M_0 de la surface (S) d'équation $z = f(x,y)$ dans l'espace et de monter sur (S) en suivant la ligne de plus grande pente ou au moins d'une pente positive (si on recherche un maximum local) jusqu'au sommet $M(x,y,z)$.



Nous sommes donc conduits à déterminer la plus grande pente (ou plutôt une pente positive dans le sens où elle se dirige vers les z croissants) du plan tangent à (S) en M, de paramètre $m(x,y)$.

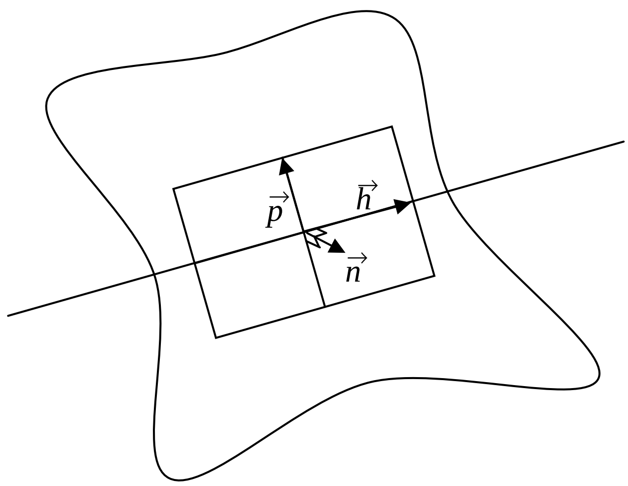
Le plan tangent, en un point régulier de la surface (que nous supposerons l'être en tous les points du parcours) est engendré par

$\dfrac{\delta\overrightarrow{OM}}{\delta x}$ et $\dfrac{\delta\overrightarrow{OM}}{\delta y}$ de composantes respectives

$$\left(1,0,\frac{\delta f(x,y)}{\delta x}\right) \text{ et } \left(0,1,\frac{\delta f(x,y)}{\delta y}\right)$$

La combinaison linéaire $\dfrac{\delta f}{\delta y}\times\dfrac{\delta\overrightarrow{OM}}{\delta x} - \dfrac{\delta f}{\delta x}\times\dfrac{\delta\overrightarrow{OM}}{\delta y}$ de composantes $\vec{h} = \left(\dfrac{\delta f}{\delta y}, -\dfrac{\delta f}{\delta x}, 0\right)$ fournit un vecteur de cote nulle donc "horizontal.

Un vecteur normal au plan, orthogonal à $\dfrac{\delta\overrightarrow{OM}}{\delta x}$ et à $\dfrac{\delta\overrightarrow{OM}}{\delta y}$, fournit un vecteur normal de composantes $\vec{n} = \dfrac{\delta\overrightarrow{OM}}{\delta x} \wedge \dfrac{\delta\overrightarrow{OM}}{\delta y} = \left(-\dfrac{\delta f}{\delta x}, \dfrac{\delta f}{\delta y}, 1\right)$



Enfin, les vecteurs orthogonaux à $\vec{h}$ et à $\vec{n}$ permettra de désigner une direction vers le "haut" ou vers le "bas" puis, suivant le signe de sa troisième composante.

$\vec{h} \wedge \vec{n} = \left(\dfrac{\delta f}{\delta x}, \dfrac{\delta f}{\delta y}, \left(\dfrac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta f}{\delta y}\right)^2\right)$.

Sa projection sur le plan (xOy) est le vecteur de composantes $\left(\dfrac{\delta f}{\delta x}, \dfrac{\delta f}{\delta y}\right)$ appelé gradient de f.
On construit donc une suite (m_n) par récurrence à partir de m_0 choisit de préférence proche du maximum local recherché et dont le test d'arrêt est $\| \overrightarrow{grad}\,(f(m_n)) \| < \varepsilon$ où ε est la précision donnée pour la recherche du maximum en lequel nous avons un point critique et donc pour lequel $\| \overrightarrow{grad}\,(f(m_n)) \| = 0$.

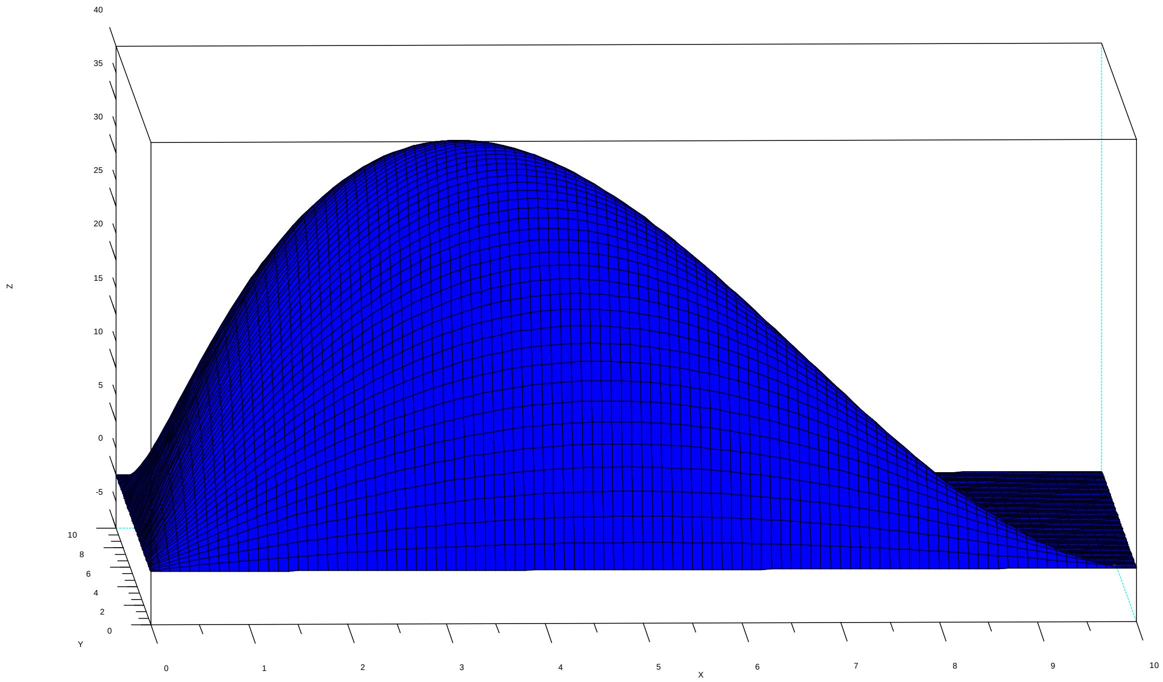
$$m_{n+1} = m_n + h\,\frac{\overrightarrow{grad}\,(f(m_n))}{\| \overrightarrow{grad}\,(f(m_n)) \|}$$ où h est le pas (constant) de déplacement sur le plan (xOy).

Revenons sur notre exemple de recherche du maximum de trois variables dont la somme est connue *S*, que nous pouvons prendre égale à 10 sur cet exemple.

Le produit est $xyz = xy(10 - x - y) = f(x,y)$.

L'utilisation du logiciel Scilab permet de montrer la surface engendrée.

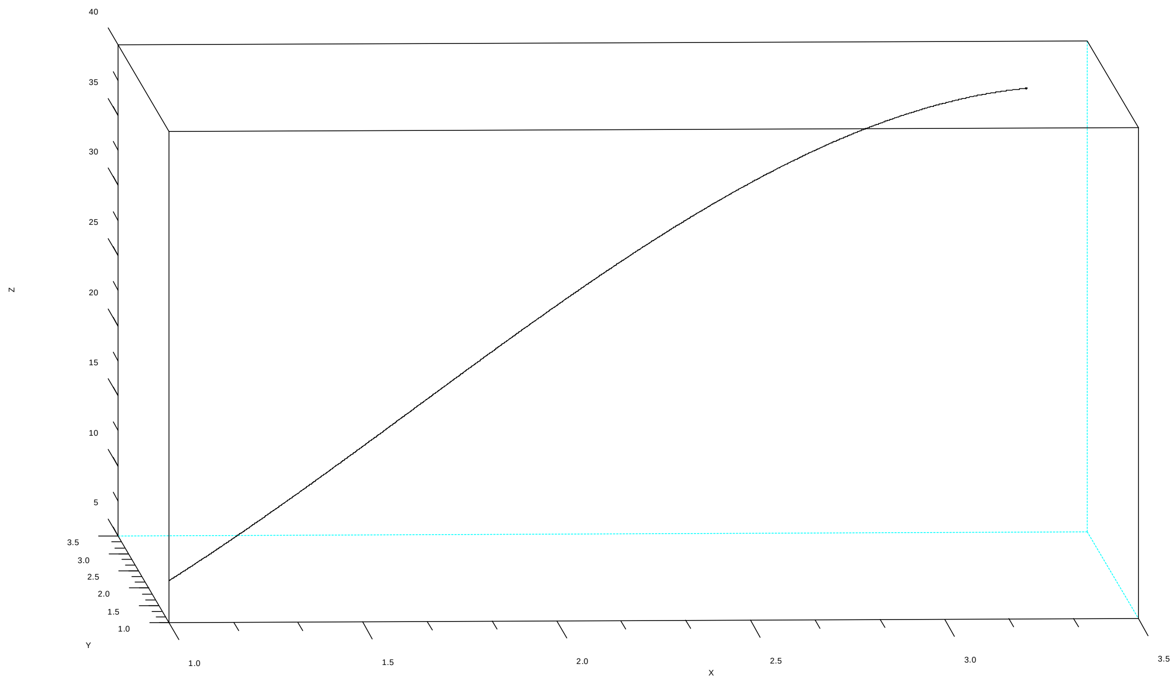
```
u=0:0.1:10;
v=0:0.1:10;
w=zeros(101,101);
for i=1:101 do
      for j=1:101 do
            if u(i)+v(j)<=10 then w(i,j)=u(i)*v(j)*(10-u(i)-v(j));
                              else w(i,j)=0;
            end
      end
end
plot3d(u,v,w)
```



Puis de construire la courbe polygonale permettant de "monter" sur la surface :

```
tx=[];ty=[];tz=[];
h=0.001;x=1;y=1;
tx(1)=x;ty(1)=y;tz(1)=y*y*(10-x-y);
n=2;
grad=sqrt((10*y-2*x*y-y^2)^2+(10*x-x^2-2*x*y)^2);
while n<10000 & grad>0.001 do
      x=x+h*(10*y-2*x*y-y^2)/grad;
            tx(n)=x;
      y=y+h*(10*x-2*x*y-x^2)/grad;
            ty(n)=y;
      grad=sqrt((10*y-2*x*y-y^2)^2+(10*x-x^2-2*x*y)^2);
            tz(n)=x*y*(10-x-y);
      n=n+1;
end

i=1:n-1;param3d(tx(i),ty(i),tz(i))
```



40
35
30
25
20
15
10
5
Z
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
Y
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
X