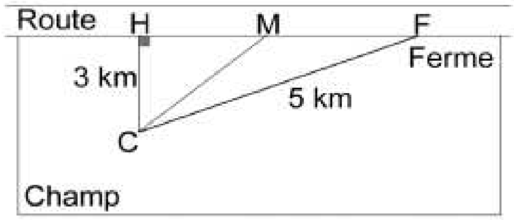
énoncé

Un agriculteur doit se rendre du point C de son champ à sa ferme F. Il se trouve à 3 kilomètres de la route qui mène à la ferme, et à 5 kilomètres de cette dernière, comme indiqué sur la figure suivante :



On considère que :

* Les points H, M et F sont alignés sur le bord de la route ;
* $CH = 3$; $CF = 5$;
* La droite (CH) est perpendiculaire à la droite (HF).

On note x la distance HM.

Le fermier cherche à économiser sa consommation de carburant. Il sait que sa consommation est :

* d'un litre de carburant par kilomètre parcouru sur la route
* de k litres de carburant par kilomètre parcouru à travers champs (le facteur k, avec $k > 1$, dépend de l'état du terrain : plus le terrain est accidenté plus k est grand).

On admettra pour réaliser l'étude expérimentale que la fonction « consommation de carburant », notée f_k, est définie par : pour tout réel x de [0 ; 4], $f_k(x) = k\sqrt{x^2+9}+4-x$.

<u>I étude expérimentale</u>

1. Recherche de la consommation minimale pour $k = 2$: on cherche dans cette question à savoir en quel point M il faut rejoindre la route, dans le cas où la consommation à travers champ est le double de celle sur la route.

a. Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, la représentation graphique de la fonction f_2.

b. Déterminer graphiquement ou à l'aide d'une table de valeurs un encadrement à 10^{-1} près de la distance HM en kilomètres correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant.

Appeler l'examinateur.

2. Détermination graphique de la valeur limite k_0 : le fermier, qui a un grand sens pratique, pense que si k est inférieur à une certaine valeur limite k_0, il n'est pas utile de rejoindre la route et que couper directement à travers champ n'est pas plus cher ! On cherche à vérifier cette affirmation.

a. Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, les représentations graphiques des fonctions f_k pour $k \in \{1{,}1 ; 1{,}2 ; 1{,}3 ; 1{,}4 ; 1{,}5 ; 1{,}6 ; 1{,}7 ; 1{,}8 ; 1{,}9 ; 2\}$.

Appeler l'examinateur pour vérification des courbes.

b. Calculer $f_k(4)$ et interpréter cette valeur dans le cadre du problème.

c. Observer, expliquer et conjecturer la valeur k_0 au-dessous de laquelle il est inutile de chercher à rejoindre la route.

<u>II Détermination de la fonction « consommation »</u>

1. Exprimer CM en fonction de x.

2. Démontrer que, pour tout réel x de [0 ; 4], $f_k(x) = k\sqrt{x^2+9}+4-x$.

Production demandée

Partie I.

– 1.b. Donner la valeur de la distance, en kilomètres, correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant.

– 2. b. et 2. c. Donner la valeur exacte de $f_k(4)$, interprétation. Donner la valeur expérimentale de k_0 et expliquer.

Partie II.

– Rédaction des justifications demandées.