Calcul vectoriel

A) Barycentre

Point pondéré

Définition

On appelle point pondéré ou point massif le couple $(A;a)$ où A est un point du plan ou de l'espace et a un réel.

Barycentre de deux points pondérés

1) Définition

Soient A et B deux points de l'espace.

On appelle G le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$ le point défini par la relation

$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

Construction :

Soit G le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$.

On utilise une décomposition par la relation de Chasles :

- Vu de A, on a successivement

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$
$$a\overrightarrow{GA} + b\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{0}$$
$$(a + b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$

d'où, puisque $a + b \neq 0$, $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a + b}\overrightarrow{AB}$

et G est alors l'unique point défini par cette relation vectorielle.

- Vu de B, on obtient de même $\overrightarrow{BG} = \dfrac{a}{a + b}\overrightarrow{BA}$

- Vu d'un point O quelconque de l'espace, on a : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

$$a\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}\right) + b\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{0}$$

soit $(a + b)\overrightarrow{GO} + a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0}$

soit encore, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{a}{a + b}\overrightarrow{OA} + \dfrac{b}{a + b}\overrightarrow{OB}$

Remarques

Dans le cas particulier où G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;a)$ où $a \neq 0$, on dit que G est l'isobarycentre de A et B.

Comme $\overrightarrow{AG} = \dfrac{a}{a + a}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, l'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$.

2) Coordonnées du barycentre

Propriété

Soient deux points A et B du plan de coordonnées $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

Le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$ est le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a + b} \qquad y_G = \frac{ay_A + by_B}{a + b}$$

Dans le cas où les points A et B sont deux points de l'espace et en supposant leurs coordonnées respectives égales à $(x_A;y_A;z_A)$ et $(x_B;y_B;z_B)$, il suffit d'ajouter la troisième coordonnée $z_G = \dfrac{az_A + bz_B}{a + b}$

Démonstration : la construction "vu de O" permet de mettre en évidence les coordonnées du point G dans un repère d'origine O.
On utilisera pour cela le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ dans le plan et le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace.

Remarque :
Dans le cas du plan complexe, si on appelle Z_G l'affixe du barycentre G et Z_A et Z_B celles de A et B, on a :
$Z = \dfrac{aZ_A + bZ_B}{a + b}$

3) homogénéité du barycentre
Propriété
Soient A et B deux points du plan ou de l'espace.
Soit G le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B; b)$ avec $a + b \neq 0$.
Pour tout réel k non nul, G est encore le barycentre des points pondérés $(A;ka)$ et $(B;kb)$.

Démonstration : Si G est le barycentre de $\{(A;a);(B; b)\}$ avec $a + b \neq 0$

alors $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $a + b \neq 0$

$k\left(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}\right) = \vec{0}$ et $k(a + b) \neq 0$

$(ka)\overrightarrow{GA} + (kb)\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $ka + kb \neq 0$ car $k \neq 0$

et G est également barycentre de $\{(A;ka);(B;kb)\}$.

4) position du barycentre
Nous avons vu que pour tous points A et B de l'espace et si G est le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$, $\overrightarrow{AG} = \dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et le point G se trouve sur (AB).

5) Réduction vectorielle
théorème
Soient A et B deux points du plan ou de l'espace et G le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B; b)$ avec $a + b \neq 0$.

Alors, pour tout point M de l'espace, $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$

démonstration : Il suffit là encore de considérer la construction vu d'un point M quelconque.

remarque : Cette dernière propriété permet de retrouver les résultats précédents :

- En considérant $M = G$ dans l'égalité, on trouve $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = (a + b)\overrightarrow{GG} = \vec{0}$
- En considérant $M = A$, on trouve $a\overrightarrow{AA} + b\overrightarrow{AB} = (a + b)\overrightarrow{AG}$ soit $\overrightarrow{AG} = \dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{AB}$

Barycentre de 3 points
1) Définition

Soient A, B et C trois points du plan ou de l'espace affectés des coefficients respectifs a; b et c, avec $a + b + c \neq 0$.
Le barycentre G des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ est défini de manière analogue par

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

<u>Première Construction</u> :
En utilisant, comme pour le barycentre de deux points, la relation de Chasles avec différents points de vue, on trouve :

Vu de A, $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Vu de O, un point de l'espace : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA} + \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$

2) Propriétés
Le barycentre de trois points vérifie les mêmes propriétés que le barycentre de 2 points :

- homogénéité du barycentre : le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ où $a + b + c \neq 0$ est également le barycentre des points pondérés $(A;ka)$, $(B;kb)$ et $(C;kc)$ pour tout $k \neq 0$.

- L'isobarycentre de trois points A, B et C étant le point vérifiant $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, c'est le centre de gravité du triangle ABC.
- réduction vectorielle :

pour tout point M du plan ou de l'espace, $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$

- Le point G a pour coordonnées, dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) de l'espace :

$$\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}, \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c}\right)$$

3) Associativité du barycentre
<u>Propriété</u>
Soit G le barycentre des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ où $a + b + c \neq 0$. Il existe alors au moins deux coefficients dont la somme est non nulle. Prenons $a + b \neq 0$ par exemple.
Soit H le barycentre (dit partiel) de $(A;a)$ et $(B;b)$.
G est alors le barycentre de $(H;a + b)$ et $(C;c)$

<u>Démonstration</u> : Soit G le barycentre de $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ où $a + b + c \neq 0$

alors $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ (1)

Comme H est le barycentre du système de points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ avec $a + b \neq 0$; on a, vu du point G, $\overrightarrow{GH} = \dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{GA} + \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{GB}$ soit $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = (a + b)\overrightarrow{GH}$ (2)

La soustraction de (2) à (1) permet d'obtenir $(a + b)\overrightarrow{GH} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ avec $(a + b) + c \neq 0$ et G est le barycentre de $(H;a + b)$ et $(C;c)$.

4) Coplanarité
<u>Propriété</u>
Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.
Le barycentre G des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ où $a + b + c \neq 0$ est un point du plan défini par les trois points A, B et C.

<u>Démonstration</u> : Comme les trois points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent un unique plan (P).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, ils définissent une base de ce plan.

Vu de A, le barycentre G des points pondérés $(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ se traduit par

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{AG}$ s'exprime en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, en utilisant les résultats de coplanarité étudiés dans le chapitre sur le calcul vectoriel, ces trois vecteurs sont coplanaires et les points A, B, C et G sont coplanaires.

Barycentre de 4 points ou plus

De la même manière, on étend à quatre points et plus les définitions vues pour le barycentre d'un système pondérés à 3 points :

Définition

Le barycentre des n points pondérés (A_1,a_1), (A_2,a_2), …, (A_n,a_n) où $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ est l'unique point G défini par

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

En particulier, la propriété d'associativité sera utile pour la construction du barycentre

Remarque importante :

Si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ alors le vecteur $\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MA_i}$ est indépendant du point M ; il existe donc un vecteur constant $\vec{u}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MA_i} = \vec{u}$.