

Contrôle Terminale S5

Exercice 1 Antilles-Guyane septembre 2005, extrait (5 points)

Soit (P) le plan complexe rapporté au repère (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 4 cm). Soit A le point d'affixe 1. On note f l'application de (P) privé de A dans (P) qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{z-1}$.

- 1) Exprimer $|z'|$ et $\arg(z')$ en fonction de $|z-1|$ et $\arg(z-1)$.
- 2) Soit C le cercle de centre A et de rayon r . On suppose que M est un point de C . Déterminer $|z'|$.
En déduire que M' appartient à un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.
- 3) Placer un point M quelconque sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$ et construire son image M' .
(On laissera les traits de construction)

Exercice 2 (7,5 points)

Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

- 1) Mettre sous forme trigonométrique z_1 , z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$
- 2) En déduire que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Exercice 3 Centres étrangers juin 2006 (7,5 points)

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis : On rappelle les deux résultats suivants :

- i) Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :
- $$\begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

- ii) Pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{aligned}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, \bar{z} désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z .

- 1) Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.
- 2) Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.
- 3) Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
- 4) Si $|z| = 1$ et si $|z+z'| = 1$, alors $z' = 0$.