Contrôle Terminale S5

Exercice 1 Amérique du Nord mai 2004 (9 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive : $(z-2)(z^2 + az + b) = 0$.

b) Résoudre (E)

2) On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant : $z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2$.

a) On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.

Montrer que : M appartient (H) si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$.

b) Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3 - i\sqrt{5}$ et $-3 + i\sqrt{5}$.

Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3) Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

a) Déterminer les affixes de A', B' et C', images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

b) On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'. On note (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).

- Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
- En utilisant la question 2) a) prouver que M' appartient à (H′) si et seulement si $x'y' = -2$.

4) Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A', B', C', la courbe (H'), puis la courbe (H).

Exercice 2 (6 points)

Soit (E) l'équation $\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1$.

1) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de f $\left(\text{vous devrez retrouver que } f'(x) = \dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}\right)$.

c) En déduire que (E) admet une seule solution. Soit α ce réel.

2) Démontrer que (E) est équivalente à l'équation $x - 1 = \sqrt{x}$.

Déterminer graphiquement un encadrement de la solution α de (E) par deux entiers consécutifs.

3) Démontrer que la solution α de (E) vérifie $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$.

En déduire la valeur exacte de α.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$.

1) Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq 1$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

2) En déduire que la courbe (C) représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet pour asymptote oblique la droite (D) d'équation $y = 2x + 3$ et préciser les positions relatives de (C) et (D).

3) En utilisant votre calculatrice graphique, la courbe semble-t-elle admettre un axe ou un centre de symétrie ?

Si oui, le démontrer.