Contrôle Terminale S

Exercice 1 (7 points)
Dans un village de montagne deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

Partie A
Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des cinq circuits.
1. Combien y-a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?
3. Quelle est la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent jamais sur le même circuit ?
4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

Partie B
On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille. Il reste donc quatre circuits pour chacune des deux familles.
On note :
E l'évènement « les deux familles font le même circuit le premier jour ».
F l'évènement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».
Calculer les probabilités suivantes :
$P(E)$, $P_E(F)$, $P_{\overline{E}}(F)$ puis $P(F \cap E)$ et $P(F \cap \overline{E})$
En déduire $P(F)$.

Exercice 2 (7 points)
On a posé à 1 000 personnes la question suivante : «Combien de fois êtes vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le premier mois / Retards le deuxième mois	**0**	**1**	**2 ou plus**	**Total**
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1) On choisit au hasard un individu de cette population.
a) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,
b) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.
2) On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :
– si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n + 1$ est 0,46.
– si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n + 1$ est 0,66.
– si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n + 1$ est encore 0,66.
On note
A_n, l'évènement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n »,
B_n, l'évènement « l'individu a eu exactement un retard le mois n »,
C_n, l'évènement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».
Les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.
a) Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent.
Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.
b) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0{,}2p_n + 0{,}66$.

d) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0{,}55$.

Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

e) Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$.

Exercice 3 (7 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1) a) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Etudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra comme unité 2 cm).

b) Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $(O, \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b) Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d) Prouver qu'elle converge.

3) Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

En déduire sa valeur.