Autour de Racine de 2 :

Le texte de Léonard Euler :

Généralifons ce que nous venons d'expofer, en fuppofant que l'équation donnée foit xx = a, & qu'on fache d'avance que x eft plus grand que n, mais plus petit que n + 1. Si après cela nous fuppofons x = n + p, en forte que p doive être une fraction, & que pp puiffe fe négliger comme une quantité très petite, nous aurons xx = nn + 2np = a ; ainfi 2np = a – nn, & p = (a – nn)/(2n) ; par conséquent x = n + (a – nn)/(2n) = (nn + a)/(2n) . Or fi n approchait déjà de la vraie valeur, cette nouvelle valeur (nn + a)/(2n) en approchera encore beaucoup plus. Ainfi en la fubftituant à n, on fe trouvera encore plus prés de la vérité ; on aura une nouvelle valeur qu'on pourra fubftituer de nouveau, afin d'approcher encore d'avantage ; & on pourra continuer le même procédé auffi loin qu'on voudra.

Soit, par exemple, a = 2, c'eft-à-dire qu'on demande la racine quarrée de x ; fi on connaît déjà

une valeur affez approchante, exprimée par (nn + 2)/(2n) . Soit donc

n = 1, on aura x = 3/2,

n = 3/2, on aura x = 17/12,

n = 17/12, on aura x = 577/408;

& cette dernière valeur approche fi fort de V2 , que fon quarré 332929/166464 ne diffère du nombre 2 que de la petite quantité 1/166464 , dont il le furpaffe.

Algorithme d'Euler :

1. Lire le texte et le réécrire en français et mathématique actuels.
2. Vérifier les résultats numériques donnés par Euler dans l'exemple pour a = 2.
3. a) Constater que les nombres x sont les premiers termes de la suite ainsi construite : $x_0 = 2$ et pour tout n entier naturel, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$.

   b) Démontrer que pour tout n entier naturel, $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}$. En déduire que pour tout n entier naturel, $x_n > \sqrt{2}$.

   c) Démontrer que la suite x est décroissante.

Algorithme de Babylone :

R_1 est un rectangle de dimensions $x_1 = 2$ et $y_1 = 1$. On construit à partir de R_1 une suite de rectangles d'aire 2 qui se rapprochent de plus en plus de l'aire d'un carré d'aire 2.

R_2 a pour dimensions $x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}$ et $y_2 = \frac{2}{x_2}$.

R_3 a pour dimensions $x_3 = \frac{x_2 + y_2}{2}$ et $y_3 = \frac{2}{x_3}$ et ainsi de suite...

R_{n+1} a pour dimensions $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \frac{2}{x_n}$. Vérifier que ces rectangles ont pour aire 2.

1. Vérifier que l'on retrouve la suite x de la méthode 1.
2. y est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $y_n = \frac{2}{x_n}$. Démontrer que pour tout n entier naturel, $y_n < \sqrt{2}$.

   Démontrer que la suite y est décroissante.
3. Réaliser la feuille de calcul ci-dessous avec le tableur Excel. Dans la cellule C2, on tape 2. Dans la cellule C3, on tape = 0.5*(C2+2/C2), puis on recopie vers le bas. Dans la cellule B2, on tape =2/C2 puis on recopie vers le bas. En D2, on tape = C2-B2 puis on recopie vers le bas.
4. On peut démontrer mais on l'admet ici que les suites x et y convergent vers $\sqrt{2}$.

   A partir de quelle valeur de n, l'encadrement $x_n < \sqrt{2} < y_n$ a-t-il une amplitude inférieure à 10^{-6} ?

Microsoft Excel - Classeur1

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données

Arial 10

C3 = =0,5*(C2+2/C2)

	A	B	C	D
1	n	Yn	Xn	Xn-Yn
2	0	1	2	1
3	1	1,33333333	1,5	0,16666667
4	2	1,41176471	1,41666667	0,00490196
5	3	1,41421144	1,41421569	4,2478E-06
6	4	1,41421356	1,41421356	3,1897E-12
7	5	1,41421356	1,41421356	0
8	6	1,41421356	1,41421356	0
9	7	1,41421356	1,41421356	0
10	8	1,41421356	1,41421356	0
11	9	1,41421356	1,41421356	0
12	10	1,41421356	1,41421356	0
13	11	1,41421356	1,41421356	0
14	12	1,41421356	1,41421356	0
15	13	1,41421356	1,41421356	0
16	14	1,41421356	1,41421356	0
17	15	1,41421356	1,41421356	0