

# Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2004

## Exercice 1

7 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique: 10 cm).

### Partie A

1.
  - a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b. Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.
  - c. Construire  $\Gamma$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
2.
  - a. Montrer que, pour tout réel  $m$  de  $]0 ; \frac{1}{e}[$ , l'équation  $f(x) = m$  admet deux solutions.
  - b. Dans le cas où  $m = \frac{1}{4}$ , on nomme  $\alpha$  et  $\beta$  les solutions (avec  $\alpha < \beta$ ). Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .
  - c. Résoudre l'équation  $f(x) = m$  dans le cas où  $m = 0$  et  $m = \frac{1}{e}$ .

### Partie B

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

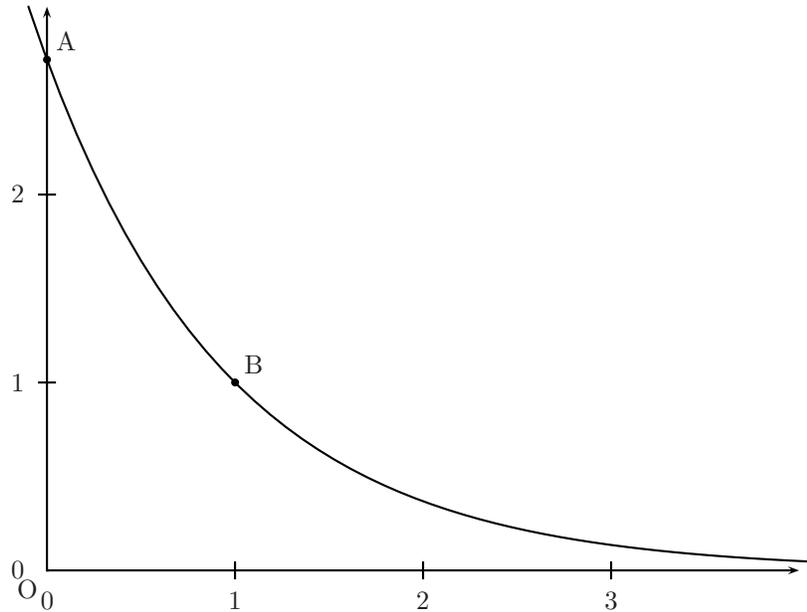
$$\begin{cases} u_0 &= \alpha \\ u_{n+1} &= u_n e^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

où  $\alpha$  est le réel défini à la question **A. 2. b.**

- a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
  - b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
  - c. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente? Si oui, déterminer sa limite.
2. On considère la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = \ln u_n$ .
  - a. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel, on a  $u_n = w_n - w_{n+1}$ .
  - b. On pose  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .  
Montrer que  $S_n = w_0 - w_{n+1}$ .
  - c. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $v_0$  ( $v_0 > 0$ ) et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$ .  
Existe-t-il une valeur de  $v_0$  différente de  $\alpha$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ , on ait  $u_n = v_n$ ,  
Si oui, préciser laquelle.

**Exercice 2**

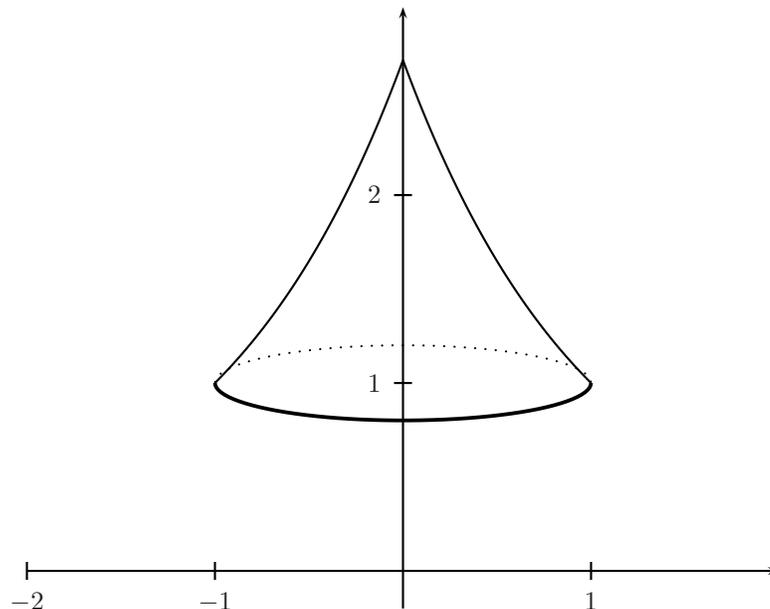
**3 points**



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que} \quad f(0) = e.$$

1. Déterminer  $f(x)$  pour tout  $x$  réel.
2. Soit  $t$  un réel donné de l'intervalle  $[1; e]$ .  
Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $e^{1-x} = t$  d'inconnue  $x$ .
3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.  
On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe  $\widehat{AB}$  comme représenté ci-dessous. On note  $V$  son volume.  
On admet que  $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$ .  
Calculer  $V$  à l'aide de deux intégrations par parties successives.



**Exercice 3**

**5 points**

On note  $p_A(B)$  la probabilité conditionnelle de l'évènement  $B$  sachant que l'évènement  $A$  est réalisé.

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.  
 On note  $A_0$  l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire » ;  
 On note  $A_1$  l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire » ;  
 On note  $A_2$  l'évènement : « on a obtenu deux boules noires » .  
 Calculer les probabilités de  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$ .
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.  
 On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.  
 On note  $B_0$  l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n° 2 »  
 On note  $B_1$  l'évènement : « on a obtenu mie seule boule noire au tirage n° 2 »  
 On note  $B_2$  l'évènement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n° 2 »
  - a. Calculer  $p_{A_0}(B_0)$ ,  $p_{A_1}(B_0)$  et  $p_{A_2}(B_0)$ .
  - b. En déduire  $p(B_0)$ .
  - c. Calculer  $p(B_1)$  et  $p(B_2)$ .
  - d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'évènement  $R$  : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ».  
 Montrer que  $p(R) = \frac{1}{3}$ .

**Exercice 4**

**5 points**

**Partie A**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit  $P$  le point d'affixe  $p$  où  $p = 10$  et  $\Gamma$  le cercle de diamètre  $[OP]$ .

On désigne par  $\Omega$  le centre de  $\Gamma$ .

Soit  $A, B, C$  les points d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ , où  $a = 5 + 5i$ ,  $b = 1 + 3i$  et  $c = 8 - 4i$ .

1. Montrer que  $A, B$  et  $C$  sont des points du cercle  $\Gamma$ .
2. Soit  $D$  le point d'affixe  $2 + 2i$ .  
 Montrer que  $D$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur la droite  $(BC)$ .

**Partie B**

À tout point  $M$  du plan différent de  $O$ , d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que

$$z' = \frac{20}{\bar{z}} \quad \text{où } z \text{ désigne le nombre conjugué de } z.$$

1. Montrer que les points  $O, M$  et  $M'$  sont alignés.

2. Soit  $\Delta$  la droite d'équation  $x = 2$  et  $M$  un point de  $\Delta$  d'affixe  $z$ .  
 On se propose de définir géométriquement le point  $M'$  associé au point  $M$ .
- Vérifier que  $z + \bar{z} = 4$ .
  - Exprimer  $z' + \bar{z}'$  en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$  et en déduire que  $5(z' + \bar{z}') = z'\bar{z}'$ .
  - En déduire que  $M'$  appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle  $\Gamma$ .  
 Placer  $M'$  sur la figure.

**Exercice 4**

**5 points**

**Exercice de spécialité**

Soit  $A_0$  et  $B_0$  deux points du plan orienté tels que  $A_0B_0 = 8$ . On prendra le centimètre pour unité.

Soit  $S$  la similitude de centre  $A_0$ , de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{3\pi}{4}$ .

On définit une suite de points  $(B_n)$  de la façon suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n, B_{n+1} = S(B_n).$$

- Construire  $B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$ .
- Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , les triangles  $A_0B_nB_{n+1}$  et  $A_0B_{n+1}B_{n+2}$  sont semblables.
- On définit la suite  $(l_n)$  par : pour tout entier naturel  $n, l_n = B_nB_{n+1}$ .
  - Montrer que la suite  $(l_n)$  est une suite géométrique et préciser sa raison.
  - Exprimer  $l_n$  en fonction de  $n$  et de  $l_0$ .
  - On pose  $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \dots + l_n$ .  
 Déterminer la limite de  $\Sigma_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Résoudre l'équation  $3x - 4y = 2$  où  $x$  et  $y$  sont deux entiers relatifs.
  - Soit  $\Delta$  la droite perpendiculaire en  $A_0$  à la droite  $(A_0B_0)$ .  
 Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n, B_n$  appartient-il à  $\Delta$ ?